

Criterio de Estabilidad de Nyquist- Aplicación al análisis de la Estabilidad de Sistemas de Control continuos y LTI.

1. Prefacio.

La experiencia de los últimos años, en relación con la comprensión del análisis de la Estabilidad de los Sistemas de Control y su aplicación a la resolución de problemas, empleando el Criterio General de Nyquist, pone de manifiesto que los estudiantes del quinto nivel de las carreras de Electrónica y Eléctrica en la UTN-FRBA/FRH, que reciben el primer curso de Control, tienen muchas dificultades para comprender cabalmente el tema de referencia. Las razones de tales dificultades radican fundamentalmente en:

- Inadecuado manejo, por parte de los estudiantes, de la Respuesta en frecuencia de Sistemas dinámicos continuos y LTI.
- Dificultades, por parte de los estudiantes, con Álgebra de números complejos (Cociente, producto, potencia, Fórmula de Euler, etc.).
- Dificultades, por parte de los estudiantes, con la Representación Conforme y su fluido manejo, sobre todo, para funciones que se expresan por un cociente de polinomios en la variable compleja $s = \sigma + j\omega$, y aplicación del teorema del argumento (Cauchy).
- Dificultades por parte de los estudiantes para integrar los conocimientos recibidos en Ciencias Básicas, Tecnologías Básicas y Tecnologías Aplicadas.

Ante este panorama, hemos decidido escribir estas notas, que no pretenden suplir la extensa y excelente bibliografía existente sobre el tema, sino más bien darle un enfoque desde el punto de vista de la Ingeniería de Control, remarcando los aspectos conceptuales básicos y fundamentales para que los estudiantes comprendan los conceptos y puedan aplicarlos, sin grandes dificultades, a la resolución de problemas concretos de Control, que se plantean en las Cátedras de Sistemas de Control en ingeniería Electrónica y en la Cátedra de Control Automático de ingeniería Eléctrica.

Como veremos en su momento, los problemas de estabilidad mediante Nyquist se pueden resolver utilizando MATLAB, no obstante, en esta etapa preferimos que los estudiantes utilicen las expresiones matemáticas correspondientes, a los efectos de lograr una adecuada comprensión de la teoría y de los conceptos fundamentales sobre el tema.

Agradecemos a las autoridades de los departamentos de Electrónica y Eléctrica de la UTN-FRBA/FRH, por el constante aliento y apoyo para que podamos difundir los conocimientos básicos fundamentales, relacionados con la Ingeniería de Control. También agradecemos a los Profesores de la Cátedra por sus valiosos comentarios y sugerencias.

2. Correspondencia entre un contorno cerrado en el plano complejo $s = \sigma + j\omega$, con su contorno imagen en el plano $G(s)$. Teorema del argumento (Cauchy).

- Considérese un modelo de primer orden, dado por la función transferencia de un sistema continuo y LTI dada por la (1):

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (1)$$

La función transferencia (1) tiene un polo en $s = -1$, y se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 1. En dicha figura se considera, además, un contorno cerrado como el ABCDEFGH, que no contiene al polo $s = -1$.

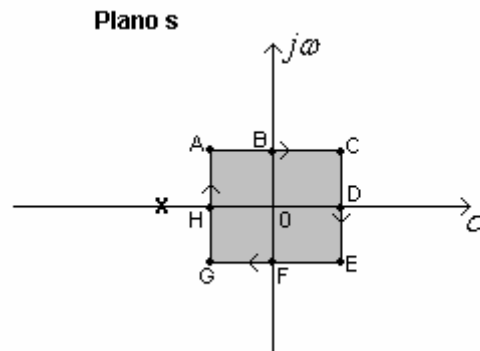


Fig.1. Plano s y contorno cerrado, que no incluye al polo $s=-1$.

Se recorrerá el contorno cerrado en la dirección indicada en la figura 1, dándole valores a la variable $s = \sigma + j\omega$, en correspondencia con los puntos A, B, C, D, E, F, G y H, del contorno cerrado y, se determinarán los correspondientes puntos en el plano $G(s)$.

Punto A: $s_A = -0.5 + j0.5$

$$G(s_A) = \frac{1}{-0.5 + j0.5 + 1} = \frac{1}{0.5 + j0.5} = \frac{0.5 - j0.5}{(0.5)^2 + (0.5)^2} = 1 - j$$

Punto B: $s_B = j0.5$

$$G(s_B) = \frac{1}{j0.5 + 1} = \frac{1}{1 + j0.5} = \frac{1 - j0.5}{(1)^2 + (0.5)^2} = 0.8 - j0.4$$

Punto C: $s_C = 0.5 + j0.5$

$$G(s_C) = \frac{1}{0.5 + j0.5 + 1} = \frac{1}{1.5 + j0.5} = \frac{1.5 - j0.5}{(1.5)^2 + (0.5)^2} = 0.6 - j0.2$$

Punto D: $s_D = 0.5$

$$G(s_D) = \frac{1}{0.5 + 1} = \frac{1}{1.5} = 0.6666$$

Punto E: $s_E = 0.5 - j0.5$

$$G(s_E) = \frac{1}{0.5 - j0.5 + 1} = \frac{1}{1.5 - j0.5} = \frac{1.5 + j0.5}{(1.5)^2 + (0.5)^2} = 0.6 + j0.2$$

Punto F: $s_F = -j0.5$

$$G(s_F) = \frac{1}{-j0.5 + 1} = \frac{1 + j0.5}{(0.5)^2 + 1^2} = 0.8 + j0.4$$

Punto G: $s_G = -0.5 - j0.5$

$$G(s_G) = \frac{1}{-0.5 - j0.5 + 1} = \frac{1}{0.5 - j0.5} = \frac{0.5 + j0.5}{(0.5)^2 + (0.5)^2} = 1 + j$$

Punto H: $s_H = -0.5$

$$G(s_H) = \frac{1}{-0.5 + 1} = \frac{1}{0.5} = 2.0$$

Con los puntos así calculados, se está en condiciones de dibujar el contorno en el plano $G(s)$. En la figura 2 se muestra el contorno resultante en el plano $G(s)$.

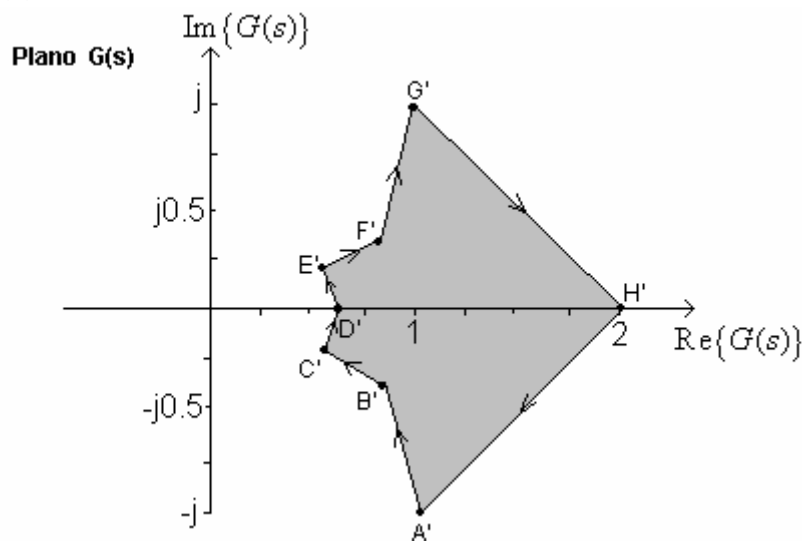


Fig. 2. Imagen en el plano $G(s)$, del contorno indicado en la Fig.1.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s, que no contiene al polo (único) de $G(s)$, tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano $G(s)$ que no contiene al origen de dicho plano.

Consideremos ahora, y para la misma función transferencia, un segundo contorno cerrado en el plano s , como el mostrado en la figura 3.

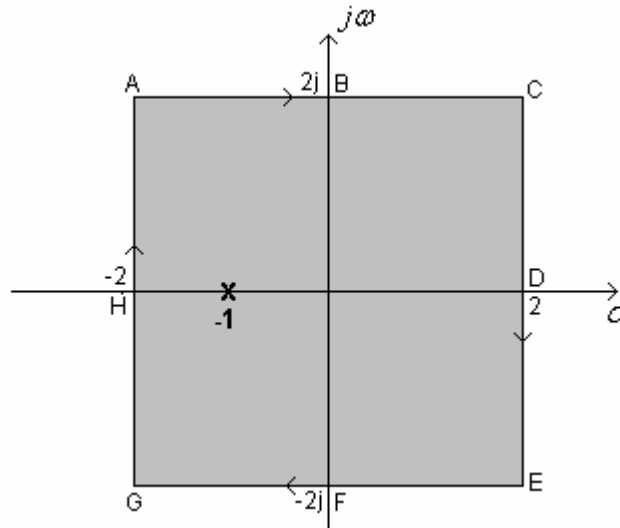


Fig.3. Plano s y contorno cerrado, que incluye al polo $s=-1$.

Se recorrerá el contorno cerrado en la dirección indicada en la figura 3, dándole valores a la variable $s=\sigma + j\omega$, en correspondencia con los puntos A, B, C, D, E, F, G y H, del contorno cerrado y, se determinarán los correspondientes puntos en el plano $G(s)$.

Punto A: $s_A = -2 + j2$

$$G(s_A) = \frac{1}{-2 + j2 + 1} = \frac{1}{-1 + j2} = \frac{-1 - j2}{(1)^2 + (2)^2} = -0.2 - j0.4$$

Punto B: $s_B = j2$

$$G(s_B) = \frac{1}{j2 + 1} = \frac{1}{1 + j2} = \frac{1 - j2}{(1)^2 + (2)^2} = 0.2 - j0.4$$

Punto C: $s_C = 2 + j2$

$$G(s_C) = \frac{1}{2 + j2 + 1} = \frac{1}{3 + j2} = \frac{3 - j2}{(3)^2 + (2)^2} = 0.23 - j0.154$$

Punto D: $s_D = 2$

$$G(s_D) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Punto E: $s_E = 2 - j2$

$$G(s_E) = \frac{1}{2 - j2 + 1} = \frac{1}{3 - j2} = \frac{3 + j2}{(3)^2 + (2)^2} = 0.23 + j0.154$$

Punto F: $s_F = -2j$

$$G(s_F) = \frac{1}{-2j + 1} = \frac{1 + 2j}{5} = 0.2 + j0.4$$

Punto G: $s_G = -2 - j2$

$$G(s_G) = \frac{1}{-2 - j2 + 1} = \frac{1}{-1 - j2} = \frac{-1 + j2}{(-1)^2 + (-2)^2} = -0.20 + j0.40$$

Punto H: $s_H = -2$

$$G(s_H) = \frac{1}{-2 + 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Con los puntos así calculados, se está en condiciones de dibujar el contorno en el plano $G(s)$. En la figura 4, se muestra el contorno resultante en el plano $G(s)$.

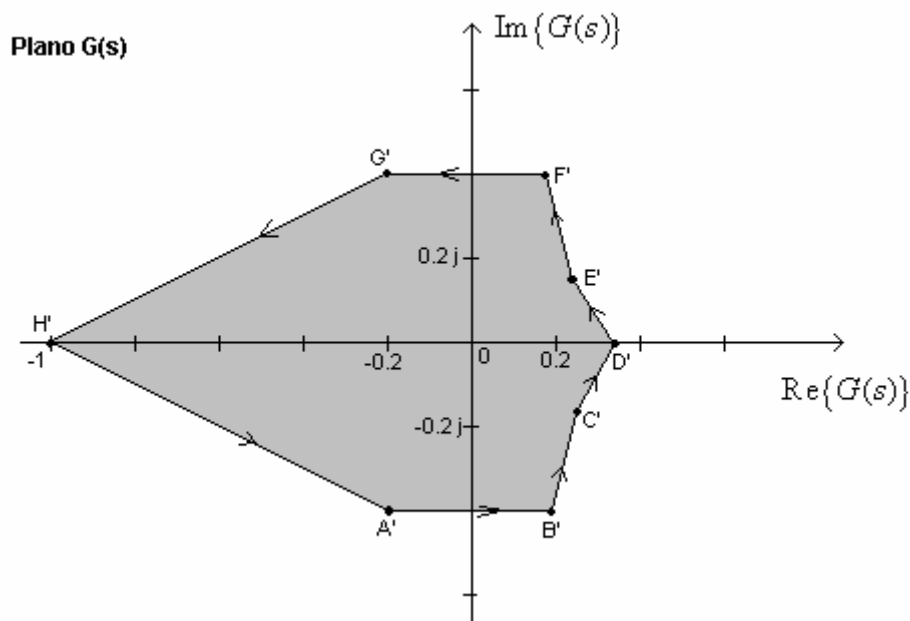


Fig. 4. Imagen en el plano $G(s)$, del contorno indicado en la Fig.3.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s , que contiene al polo (único) de $G(s)$, tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano $G(s)$, que contiene al origen de dicho plano. El sentido de giro del contorno cerrado en el plano $G(s)$ es contrario al sentido del contorno del plano s .

- Considérese un modelo de primer orden, pero con un cero, dado por la función transferencia de un sistema continuo y LTI:

$$G(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad (2)$$

La función transferencia (2) tiene un polo en $s = -2$, y un cero en $s = -1$, estas singularidades se pueden representar gráficamente como se muestra en la figura 5. En dicha figura se considera, además, un contorno cerrado como el ABCDEF, que contiene al polo $s = -2$ y al cero $s = -1$.

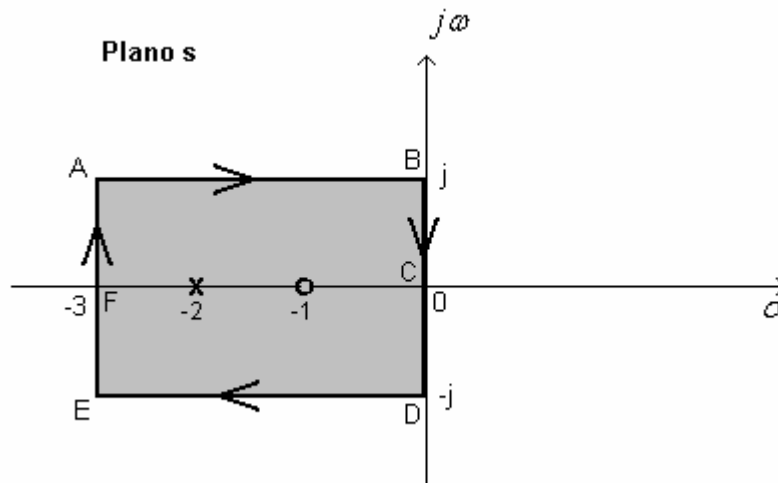


Fig. 5. Plano s y contorno cerrado, que incluye al polo $s=-2$ y al cero $s=-1$.

Se recorrerá el contorno cerrado en la dirección indicada en la figura 5, dándole valores a la variable $s = \sigma + j\omega$, en correspondencia con los puntos A, B, C, D, E, y F del contorno cerrado y, se determinarán los correspondientes puntos en el plano $G(s)$.

Punto A: $s_A = -3 + j$

$$G(s_A) = \frac{-3 + j + 1}{-3 + j + 2} = \frac{-2 + j}{-1 + j} = \frac{(-2 + j)(-1 - j)}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{3 + j}{2} = 1.5 + j0.5$$

Punto B: $s_B = j$

$$G(s_B) = \frac{j+1}{j+2} = \frac{(1+j)(2-j)}{(1)^2 + (2)^2} = \frac{3+j}{5} = 0.6 + j0.2$$

Punto C: $s_C = 0$

$$G(s_C) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Punto D: $s_D = -j$

$$G(s_D) = \frac{-j+1}{-j+2} = \frac{(1-j)(2+j)}{(1)^2 + (2)^2} = \frac{3-j}{5} = 0.6 - j0.2$$

Punto E: $s_E = -3 - j$

$$G(s_E) = \frac{-3-j+1}{-3-j+2} = \frac{(-2-j)(-1+j)}{(-1)^2 + (-1)^2} = \frac{3-j}{2} = 1.5 - j0.5$$

Punto F: $s_F = -3$

$$G(s_D) = \frac{-3+1}{-3+2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Con los puntos así calculados, se está en condiciones de dibujar el contorno en el plano $G(s)$. En la figura 6, se muestra el contorno cerrado resultante, en el plano $G(s)$.

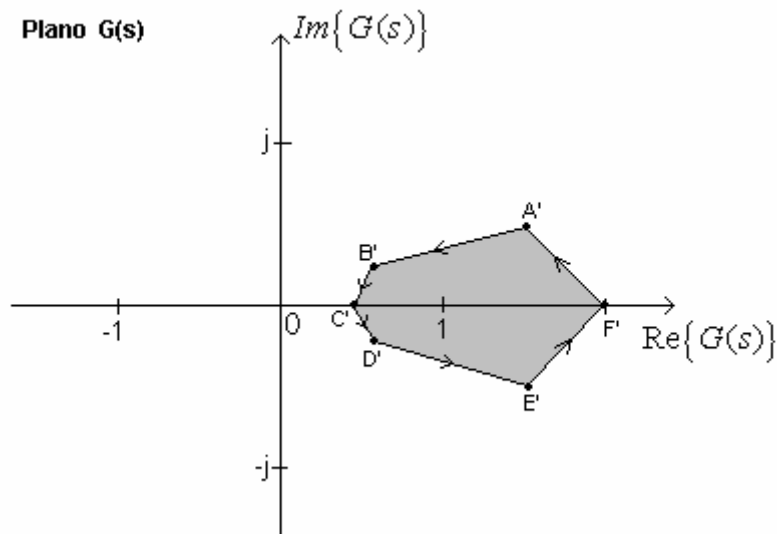


Fig. 6. Contorno en el plano $G(s)$, imagen del contorno de la Fig. 5.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s, que contiene al polo y al cero de G(s), tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano G(s) que no contiene al origen de dicho plano.

Para la misma función transferencia, analizaremos un contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$, que encierra al polo $s = -2$, y con el sentido de circulación mostrado en la figura 7.

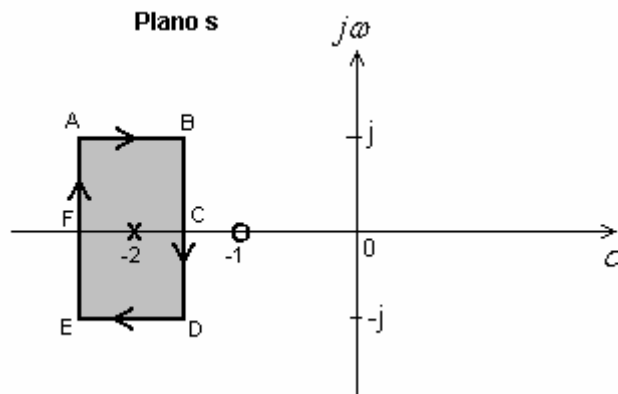


Fig.7. Contorno cerrado en el plano s, conteniendo al polo $s = -2$.

Para determinar el contorno cerrado en el plano G(s), se realizan los cálculos para los puntos A, B, C, D, E, y F del contorno indicado en la figura 7.

Punto A: $s_A = -2.5 + j$

$$G(s_A) = \frac{-2.5 + j + 1}{-2.5 + j + 2} = \frac{(-1.5 + j)(-0.5 - j)}{(-0.5)^2 + (1)^2} = \frac{1.75 + j}{1.25} = 1.4 + j0.8$$

Punto B: $s_B = -1.5 + j$

$$G(s_B) = \frac{-1.5 + j + 1}{-1.5 + j + 2} = \frac{(-0.5 + j)(0.5 - j)}{(0.5)^2 + (1)^2} = \frac{0.75 + j}{1.25} = 0.6 + j0.8$$

Punto C: $s_C = -1.5$

$$G(s_C) = \frac{-1.5 + 1}{-1.5 + 2} = \frac{-0.5}{0.5} = -1$$

Punto D: $s_D = -1.5 - j$

$$G(s_D) = \frac{-1.5 - j + 1}{-1.5 - j + 2} = \frac{(-0.5 - j)(0.5 + j)}{(0.5)^2 + (-1)^2} = \frac{0.75 - j}{1.25} = 0.6 - j0.8$$

Punto E: $s_E = -2.5 - j$

$$G(s_E) = \frac{-2.5 - j + 1}{-2.5 - j + 2} = \frac{(-1.5 - j)(-0.5 + j)}{(-0.5)^2 + (-1)^2} = \frac{1.75 - j}{1.25} = 1.4 - j0.8$$

Punto F: $s_F = -2.5$

$$G(s_E) = \frac{-2.5 + 1}{-2.5 + 2} = \frac{-1.5}{-0.5} = 3.0$$

Con los puntos así calculados, se está en condiciones de dibujar el contorno en el plano $G(s)$. En la figura 8, se muestra el contorno cerrado resultante, en el plano $G(s)$.

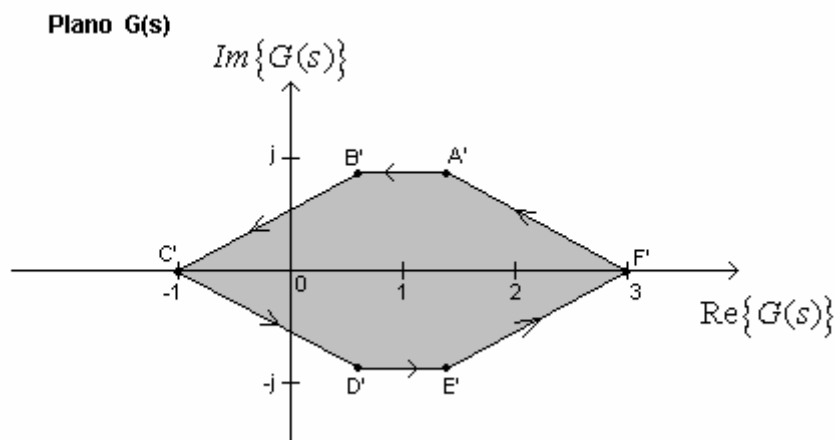


Fig.8. Contorno en el plano $G(s)$, como imagen del contorno de la figura 7.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s , que contiene al polo $s = -2$ (único) de $G(s)$, tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano $G(s)$, que contiene al origen de dicho plano. El sentido de giro del contorno cerrado en el plano $G(s)$ es contrario al contorno del plano s .

Para la misma función transferencial, analizaremos un contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$, que encierra al cero $s = -1$, y con el sentido de circulación mostrado en la figura 9.

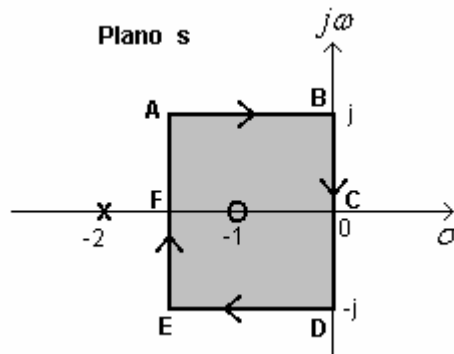


Fig.9. Contorno cerrado en el plano s que contiene al cero $s = -1$.

Para determinar el contorno cerrado en el plano $G(s)$, se realizan los cálculos para los puntos A, B, C, D, E, y F del contorno indicado en la figura 9.

Punto A: $s_A = -1.5 + j$

$$G(s_A) = \frac{-1.5 + j + 1}{-1.5 + j + 2} = \frac{(-0.5 + j)(0.5 - j)}{(0.5)^2 + (1)^2} = \frac{0.75 + j}{1.25} = 0.6 + j0.8$$

Punto B: $s_B = j$

$$G(s_B) = \frac{j + 1}{j + 2} = \frac{(1 + j)(2 - j)}{(2)^2 + (1)^2} = \frac{3 + j}{5} = 0.6 + j0.2$$

Punto C: $s_C = 0$

$$G(s_C) = \frac{0 + 1}{0 + 2} = 0.5$$

Punto D: $s_D = -j$

$$G(s_D) = \frac{-j + 1}{-j + 2} = \frac{(1 - j)(2 + j)}{(2)^2 + (-1)^2} = \frac{3 - j}{5} = 0.6 - j0.2$$

Punto E: $s_A = -1.5 - j$

$$G(s_E) = \frac{-1.5 - j + 1}{-1.5 - j + 2} = \frac{(-0.5 - j)(0.5 + j)}{(0.5)^2 + (-1)^2} = \frac{0.75 - j}{1.25} = 0.6 - j0.8$$

Punto F: $s_C = -1.5$

$$G(s_C) = \frac{-1.5 + 1}{-1.5 + 2} = \frac{-0.5}{0.5} = -1$$

Con los puntos así calculados, se está en condiciones de dibujar el contorno en el plano $G(s)$. En la figura 10, se muestra el contorno cerrado resultante, en el plano $G(s)$.

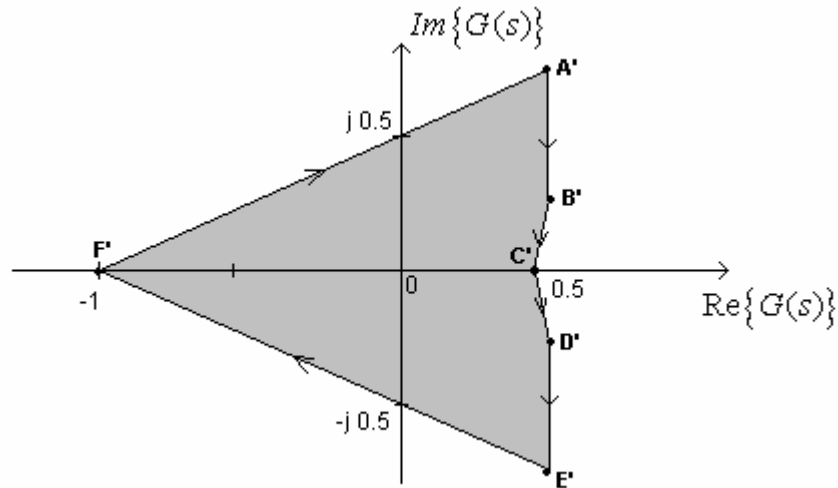


Fig.10. Contorno en el plano $G(s)$, como imagen del contorno de la figura 9.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s , que contiene al cero $s = -1$ (único) de $G(s)$, tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano $G(s)$, que contiene al origen de dicho plano. El sentido de giro del contorno cerrado en el plano $G(s)$ es igual al sentido del contorno del plano s .

Considérese una función transferencia $G(s) = (s + 1)/(s - 1)$ (3), con un polo en el semiplano derecho (sistema de *fase no-mínima*). En la figura 11 se muestra el contorno cerrado: A, B, C, D, E y F que se utilizará para determinar la imagen del contorno cerrado en el plano $G(s)$.

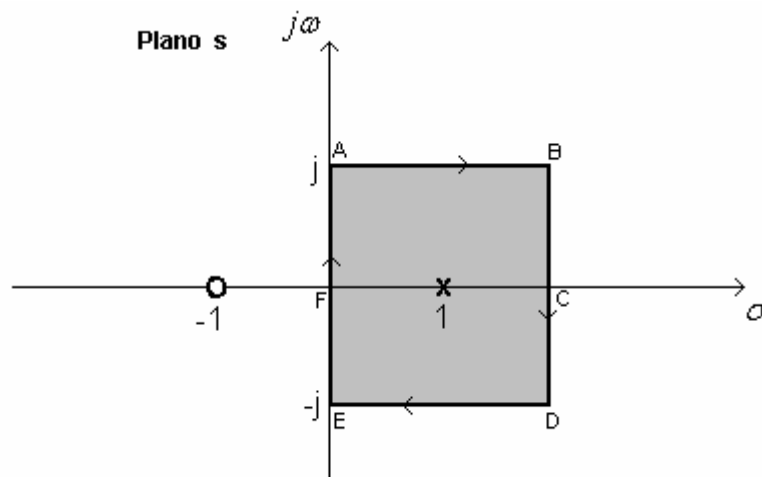


Fig. 11. Contorno cerrado en el plano s que contiene al polo $s = 1$.

Para cada punto señalado en el contorno de la figura 11, se procede a calcular su imagen en el plano $G(s)$, empleando la función transferencia dada.

Punto A: $s_A = j$

$$G(s_A) = \frac{j+1}{j-1} = \frac{(1+j)(-1-j)}{2} = -j$$

Punto B: $s_B = 2+j$

$$G(s_B) = \frac{2+j+1}{2+j-1} = \frac{3+j}{1+j} = \frac{(3+j)(1-j)}{2} = 2-j$$

Punto C: $s_C = 2$

$$G(s_C) = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

Punto D: $s_D = 2-j$

$$G(s_D) = \frac{2-j+1}{2-j-1} = \frac{3-j}{1-j} = \frac{(3-j)(1+j)}{2} = 2+j$$

Punto E: $s_E = -j$

$$G(s_E) = \frac{-j+1}{-j-1} = \frac{(1-j)(-1+j)}{2} = j$$

Punto F: $s_F = 0$

$$G(s_F) = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

En la figura 12 se muestra el contorno cerrado, imagen del contorno A, B, C, D, E y F, indicado anteriormente en la figura 11.

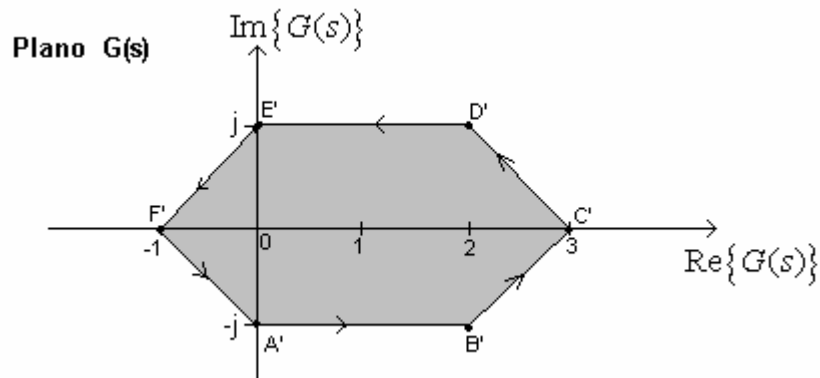


Fig. 12. Contorno en el plano $G(s)$, como imagen del contorno de la figura 11.

Conclusión:

Un contorno cerrado en el plano s , que contiene al polo $s=1$ de $G(s)$, tiene como imagen, un contorno cerrado en el plano $G(s)$, que contiene al origen de dicho plano. El sentido de giro del contorno cerrado en el plano $G(s)$ es contrario al sentido del contorno en el plano s .

Resumen de lo anterior

Sobre la base de los ejemplos simples anteriores, se puede concluir que:
Para funciones transferencia $G(s)$ que son cociente de polinomios en la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ (Sistemas continuos y LTI), cuando la variable s , toma los valores que corresponden a un contorno cerrado recorrido con sentido horario (positivo en adelante), se obtiene un contorno cerrado imagen en el plano $G(s)$, de tal manera que el número de giros del vector $G(s)$ en torno al origen del plano, es: “igual al número de ceros menos el número de polos de $G(s)$ contenidos dentro del contorno elegido del plano s ” (Teorema del argumento- Cauchy).

En forma resumida:

$$N = Z - P \tag{4}$$

Donde:

N : número de giros completos (2π) del vector $G(s)$ en torno del origen del plano $G(s)$. El sentido horario de circulación se considera positivo.

Z : número de ceros de $G(s)$, encerrados dentro del contorno bajo consideración en el plano $s = \sigma + j\omega$

P : número de polos de $G(s)$, encerrados dentro del contorno bajo consideración en el plano $s = \sigma + j\omega$

Comentarios:

- Si $N = 0 \Rightarrow Z = P$ (No hay giros completos del vector $G(s)$ en torno al origen)
- Si $N > 0 \Rightarrow Z > P$ (Sentido horario de circulación en el plano $G(s)$)
- Si $N < 0 \Rightarrow Z < P$ (Sentido antihorario de circulación en el plano $G(s)$)

Nota: El contorno cerrado, elegido en el plano complejo $s = \sigma + j\omega$, no debe pasar por ningún cero y/o polo de la función transferencia $G(s)$. Es decir, hay que evitar pasar por sobre las singularidades de $G(s)$, caso contrario no se sabría si están dentro o fuera del contorno.

Lo realizado anteriormente permite efectuar una generalización de los conceptos enunciados. Para ello considérese la función transferencia estrictamente propia ($n > m$):

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (5)$$

Descomponiendo el polinomio numerador y denominador en sus raíces, se obtiene:

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (6)$$

En la figura 13, se muestra el diagrama de polos y ceros en el plano complejo $s = \sigma + j\omega$, para una función $G(s)$, con $n=5$ y $m=4$.

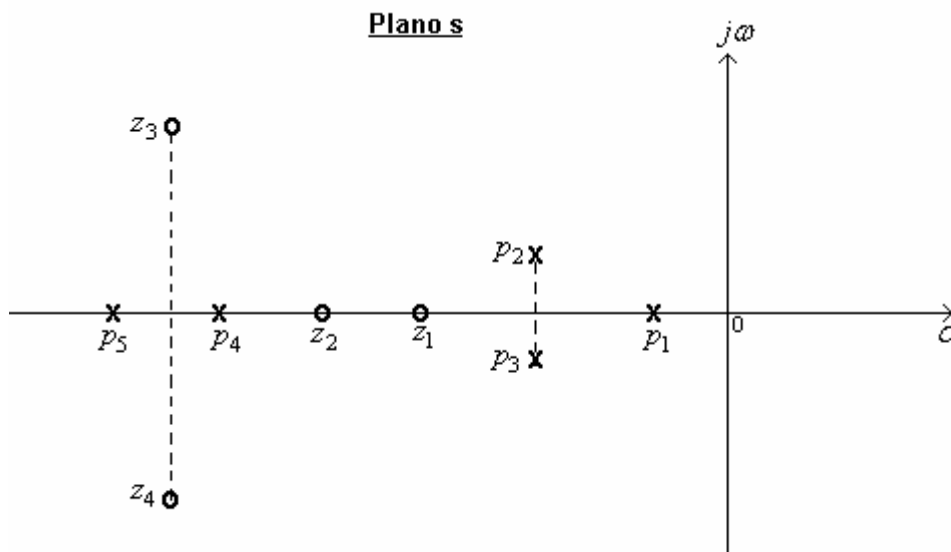


Fig.13. Ejemplo de función transferencia para $n=5$ y $m=4$.

La relación dada por la (6) se puede expresar en forma polar, de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{|s - z_1| e^{j\theta_1} \cdot |s - z_2| e^{j\theta_2} \dots |s - z_m| e^{j\theta_m}}{|s - p_1| e^{j\phi_1} |s - p_2| e^{j\phi_2} \dots |s - p_n| e^{j\phi_n}} \quad (7)$$

Cuando la variable compleja $s = \sigma + j\omega$, toma valores sobre un contorno cerrado γ , en el plano s , tal como el mostrado en la figura 14; se puede inferir que, por lo visto en los ejemplos anteriores, también se tendrá un contorno cerrado en el plano $G(s)$.

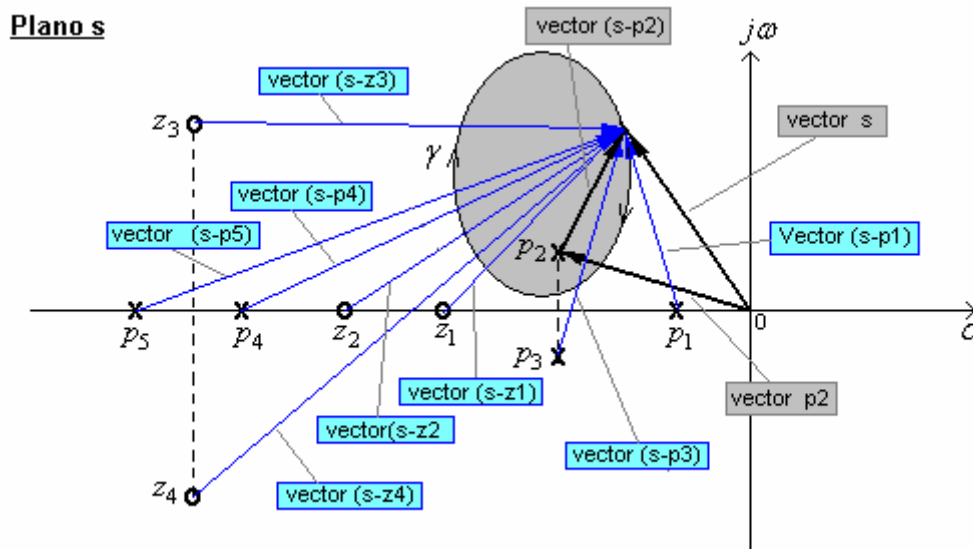


Fig. 14. Contorno cerrado γ en el plano s , conteniendo a p_2 .

Cuando se circula por la curva γ , en el sentido mostrado (positivo) en la figura 14, los vectores $(s - p_1)$, $(s - p_3)$, $(s - p_4)$, $(s - p_5)$, $(s - z_1)$, $(s - z_2)$, $(s - z_3)$, y $(s - z_4)$ salen de la posición indicada y vuelven a la misma posición, sin realizar ninguna contribución angular neta sobre $G(s)$; en cambio el vector $(s - p_2)$ genera una contribución angular neta de 360° (2π) sobre la función dada por la relación (7). Como el vector $(s - p_2)$ está en el denominador de la función transferencia (7), el ángulo neto es $\varphi_2 = 360^\circ$, pero como es un polo, dicho ángulo genera sobre la función $G(s)$ [vector $G(s)$] una rotación de -360° . En conclusión: "El contorno cerrado que se obtiene en el plano s , definido por el vector $G(s)$, cuando la variable s toma los valores ubicados sobre la curva γ , da una vuelta completa en torno del origen de su plano con sentido antihorario (negativo). Esta conclusión se muestra gráficamente en la figura 15, donde se puede ver la correspondencia entre la curva γ del plano complejo s y la curva γ' en el plano $G(s)$.

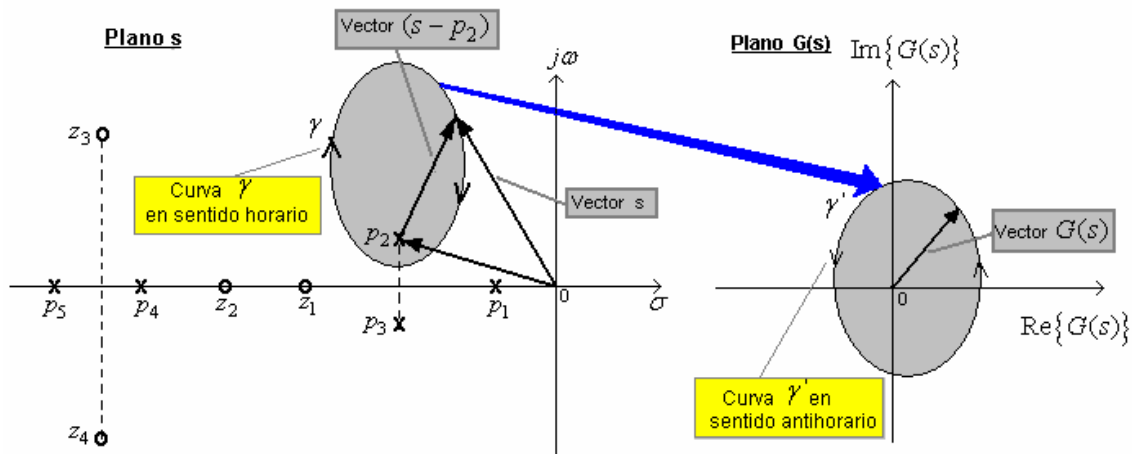


Fig. 15. Curva en sentido horario, encerrando un polo (p_2), da un contorno Cerrado con sentido antihorario, que encierra al origen del plano $G(s)$.

En la figura 16 se muestra otro caso para la misma función transferencia.

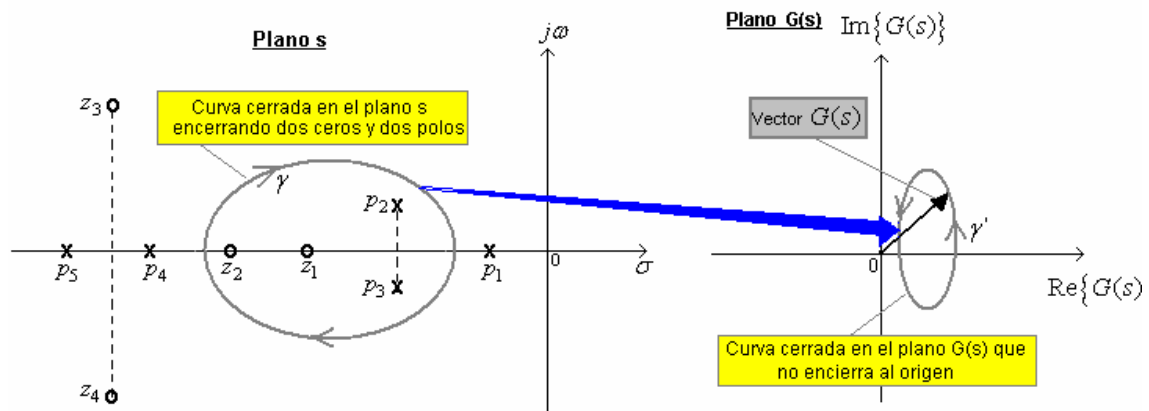


Fig. 16. Correspondencia entre un contorno cerrado del plano s , y la imagen o Contorno cerrado en el plano $G(s)$.

En el caso de la figura 16, el contorno cerrado elegido en el plano s , encierra dos ceros y dos polos, por consiguiente el contorno en el plano $G(s)$ que es cerrado, no encierra al origen del plano.

En todos los casos se cumple el "Teorema del Argumento(Cauchy)", que se puede expresar de la siguiente manera: *El número de circulaciones completas (360° ó 2π) del vector $G(s)$, alrededor del origen, es igual al número de ceros menos el número de polos encerrados por el contorno del plano s ". En fórmula*

$$N = Z - P$$

3. Contorno cerrado en el plano $s = \sigma + j\omega$, utilizado para el estudio de la estabilidad, empleando el criterio de Nyquist.

Se sabe que los sistemas de control continuos y LTI son estables si la parte real de los polos a lazo cerrado es negativa. Sea el sistema de control indicado en la figura 17.

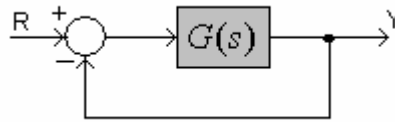


Fig.17. Sistema de control continuo y LTI.

En el sistema de la figura 17 la transferencia de lazo cerrado, como se sabe, está dada por:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{G(s)}{Q(s)} = \frac{N_G(s)/D_G(s)}{[D_G(s) + N_G(s)]/D_G(s)} \quad (8)$$

Donde:

$$Q(s) = \text{Ecuación característica} = 1 + G(s)$$

De acuerdo a la ecuación (8) los *polos de lazo cerrado* del sistema, son también *los ceros de la ecuación característica*. Para determinar los ceros de la ecuación característica se debe resolver la ecuación $1 + G(s) = 0$ o lo que es lo mismo $D_G(s) + N_G(s) = 0$. Antes de seguir con la idea que vincula el contorno en el plano s , con el contorno en el plano $G(s)$ y el concepto de estabilidad, es conveniente ver que relación existe entre los vectores $G(s)$ y $Q(s) = 1 + G(s)$. En la figura 18 se muestra la relación entre los dos vectores.

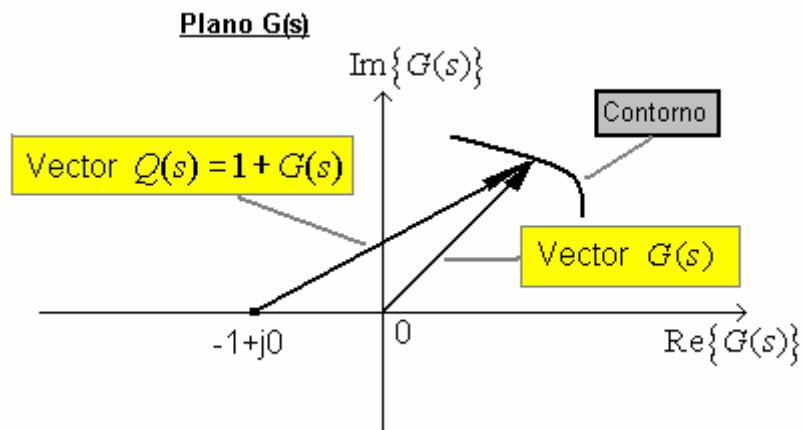


Fig.18. Relación entre los vectores $G(s)$ y $Q(s) = 1 + G(s)$.

En la figura 18 se ve que en los casos que sea necesario hablar de rotaciones del vector $G(s)$ en torno del origen, se puede hablar perfectamente de rotaciones del vector $Q(s)=1+G(s)$, en torno del punto $-1+j0$.

Esto tiene que ver con el hecho que, en general se dispone de la transferencia a lazo abierto del sistema, es decir $G(s)$, y la estabilidad del sistema está relacionada con la ecuación característica, es decir $Q(s)=1+G(s)$. Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

Cuando se desea estudiar la estabilidad de un sistema, es fundamental saber si el mismo tiene polos a lazo cerrado con parte real positiva o nula. Este estudio se puede hacer conociendo la transferencia a lazo abierto y sin resolver analíticamente la ecuación característica. Para ello se deberá analizar un contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$, que cubra todo el semiplano derecho, que es donde pueden estar los polos inestables de lazo cerrado.

La idea es aplicar los conceptos vistos de contornos cerrados, conjuntamente con el hecho, que según la ecuación (8), los polos de $Q(s)$ son los mismos que los de $G(s)$, y los ceros de $Q(s)$ son iguales a los polos de $M(s)$, transferencia a lazo cerrado. En síntesis:

$$\begin{aligned} \text{Polos de } G(s) &= \text{Polos de } Q(s) \\ \text{Ceros de } Q(s) &= \text{Polos de } M(s) \end{aligned} \quad (9)$$

Las relaciones dadas por la (9) significan que los polos de $G(s)$ que coinciden con los polos de $Q(s)$ son conocidos, porque se tiene el modelo a lazo abierto del sistema. Es decir, la incógnita es saber para un sistema dado, donde están los ceros de $Q(s)$, pero sin resolver la ecuación característica, ya que en general resulta muy laborioso debido a las variaciones de los parámetros que se utilizan para ajustar el comportamiento del sistema.

La determinación del número de ceros de $Q(s)$ con parte real positiva o nula, se puede conocer empleando el Teorema del Argumento, las relaciones (9) y la respuesta en frecuencia del sistema a lazo abierto [sin resolver analíticamente $Q(s)$].

Para ello es necesario analizar un contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$, conocido como contorno de Nyquist. En la figura 19 se muestra el contorno de Nyquist:

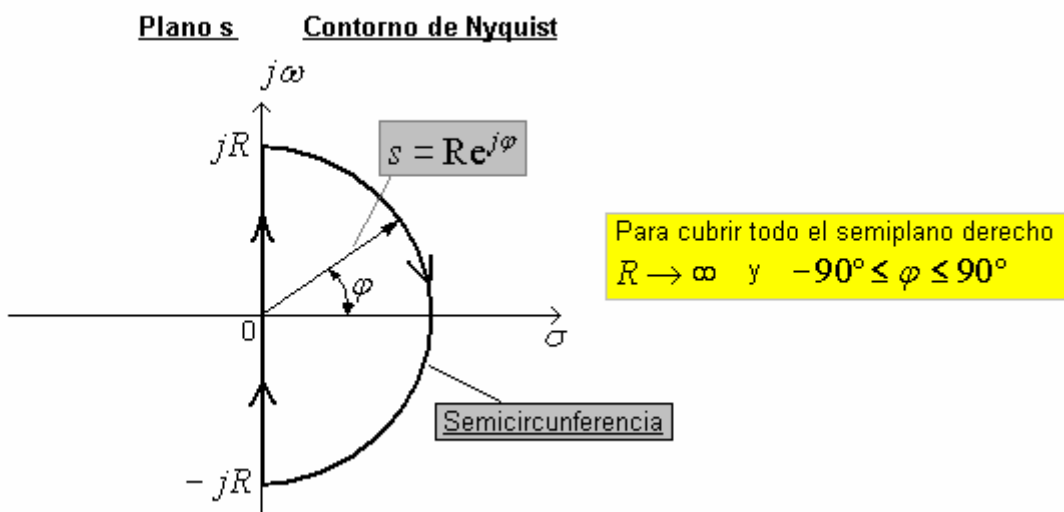


Fig. 19. Contorno de Nyquist en el plano s .

Veamos que sucede con la función transferencia de un sistema continuo y LTI, cuando la variable compleja $s = \sigma + j\omega$, toma todos los valores que corresponden al contorno de Nyquist. Para ello debemos tener presente que:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\} \\ G(-j\omega) &= \text{Re}\{G(j\omega)\} - j \text{Im}\{G(j\omega)\} \end{aligned} \quad (10)$$

Esto significa que la función transferencia para frecuencias negativas, es conjugada de la función transferencia para frecuencias positivas. Esto representa simetría respecto al eje real.

Consideremos una función transferencia general:

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (11)$$

Sobre la base de la (11), para sistemas reales, se pueden dar dos casos posibles:

Caso 1. $n > m$ (Sistema estrictamente propio)

Si la variable $s = Re^{j\varphi}$, que corresponde a la semicircunferencia del contorno de Nyquist, en la cual $R \rightarrow \infty$, la ecuación (11) se reduce a:

$$G(s) = \frac{R^m e^{jm\varphi}}{R^n e^{jn\varphi}} = R^{(m-n)} e^{j(m-n)\varphi} \rightarrow 0: \quad \forall \quad -90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ \quad (12)$$

Es decir que el contorno imagen en el plano $G(s)$, cuando la variable s toma los valores de la semicircunferencia de radio infinito, correspondiente al contorno de Nyquist, es el origen del plano $G(s)$ y no depende del argumento

φ . Es decir que, al tender R a infinito, $G(s)$ tiende a cero independientemente del ángulo φ . En la figura 20 se muestra lo obtenido con la expresión (12).

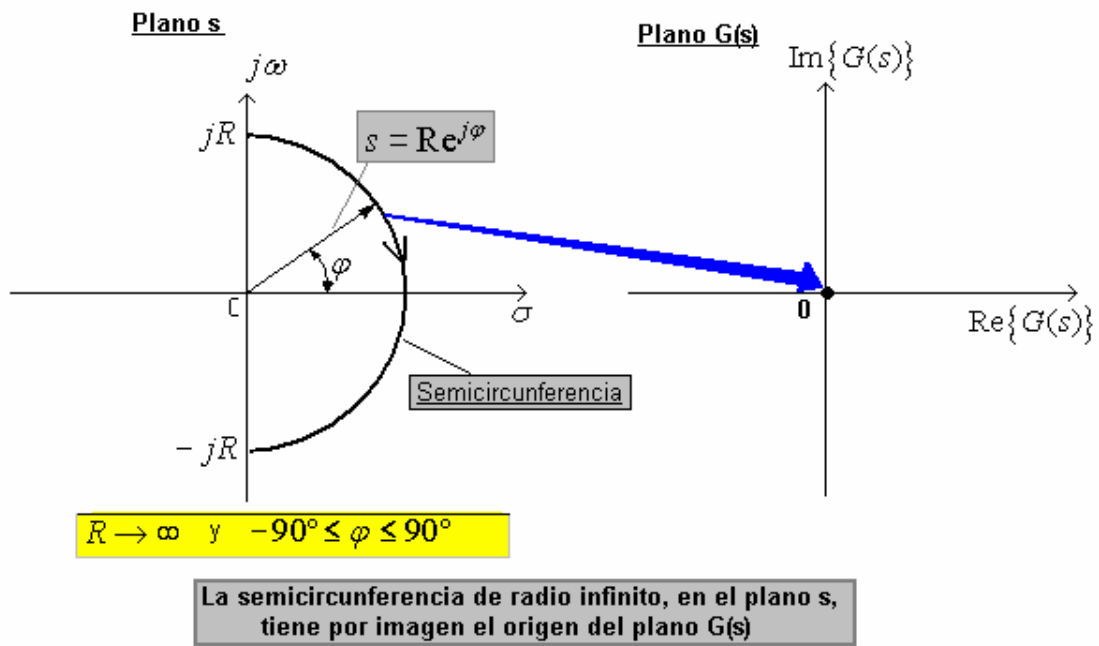


Fig.20. Imagen en el plano G(s) del contorno de radio infinito para $n > m$.

Caso 2. $n=m$ (Sistema propio)

Si la variable $s = Re^{j\phi}$, que corresponde a la semicircunferencia del contorno de Nyquist, en la cual $R \rightarrow \infty$, permite calcular que la ecuación (11) se reduce a:

$$G(s) = \frac{R^n e^{jn\phi}}{R^n e^{jn\phi}} = R^{(n-n)} e^{j(n-n)\phi} \rightarrow 1, \quad \forall \quad -90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ \quad (13)$$

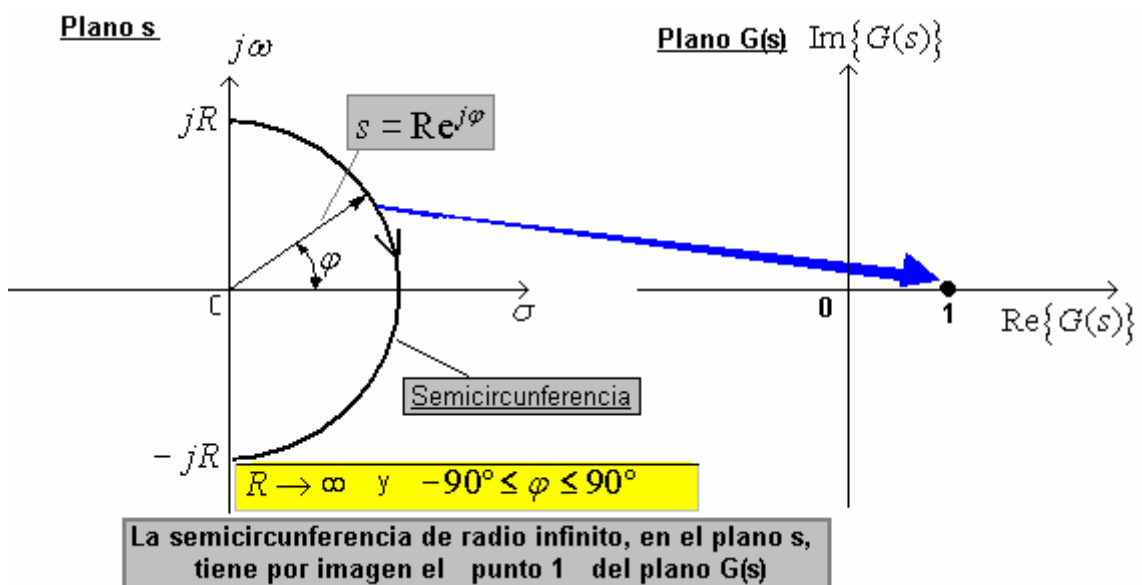


Fig. 21. Imagen en el plano G(s), del contorno de radio infinito para $n=m$.

Según se obtiene de la (13), y como se observa en el gráfico de la figura 21: el contorno imagen en el plano $G(s)$, cuando la variable s toma los valores de la semicircunferencia de radio infinito, correspondiente al contorno de Nyquist, es el punto 1 del plano $G(s)$. Es decir que al tender R a infinito, $G(s)$ tiende a uno independientemente del ángulo φ .

Conclusión:

Para las funciones transferencia de los sistemas continuos y LTI, la variación de $s = \sigma + j\omega$, cuando $s = Re^{j\varphi}$, [con: $R \rightarrow \infty$, $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$] toma los valores en correspondencia con la semicircunferencia de radio infinito, del contorno de Nyquist, la imagen en el plano $G(s)$ es un punto (0 ó 1). Es decir, el vector imagen $G(s) = \text{Re}\{G(s)\} + j \text{Im}\{G(s)\}$ es un punto, lo cuál se puede interpretar como que no se genera rotación en el plano $G(s)$, mientras la variable "s" recorre la semicircunferencia de radio infinito.

Teniendo en cuenta la relación (10) y lo mencionado anteriormente, se concluye que: El contorno cerrado en el plano $G(s)$ se obtiene cuando la variable "s" toma solamente los valores imaginarios, es decir $s = j\omega$, $\forall: (-\infty < \omega < +\infty)$.

Esta conclusión es muy importante, ya que solo se requiere disponer de la respuesta en frecuencia del sistema a lazo abierto (la que admite su medición experimental en laboratorio) para determinar el contorno cerrado en el plano $G(j\omega)$ y con ello determinar la estabilidad del sistema a lazo cerrado, mediante el criterio de Nyquist. La ventaja del criterio de Nyquist (con relación a Bode, por ejemplo) radica en que se pueden estudiar los sistemas de fase no-mínima, es decir con polos o ceros en el semiplano derecho.

Consideraciones especiales sobre el contorno de Nyquist.

a) Sistemas de fase mínima.

Por lo visto precedentemente, el contorno de Nyquist no puede pasar por encima de un polo a cero de la función transferencia $G(s)$. Pero hay muchos sistemas reales cuyo modelo es de tipo uno (tienen un polo en el origen) o tipo dos (tienen dos polos en el origen). En estos casos para definir si dichos polos se considerarán dentro o fuera del contorno de Nyquist, se requiere una modificación de dicho contorno, como se muestra en la figura 22.a. ó 22.b.

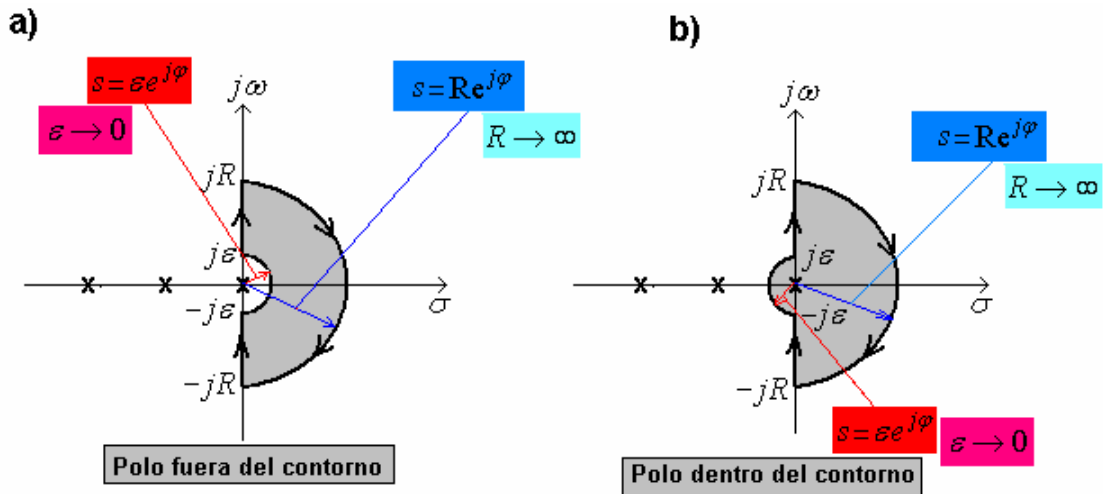


Fig. 22. (a) Contorno no contiene al polo, (b) Contorno contiene al polo.

Cualquiera de los contornos mostrados en la figura 22a y 22b, conducen al mismo resultado, ya que la estabilidad de un sistema no puede depender del contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$, sino que depende del propio sistema físico.

Para los sistemas que a lazo abierto $[G(s)]$ tienen polos en el origen, el contorno alrededor del polo es una semicircunferencia de radio infinitesimal ($\epsilon \rightarrow 0$). El contorno imagen en el plano $G(s)$, si se tiene en cuenta que para sistemas tipo uno, dos o superior, se verifica:

Sistema tipo 1 (un polo en el origen)

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon e^{j\varphi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon} e^{-j\varphi} \begin{cases} \text{Módulo de } G(s) = K/\epsilon \rightarrow \infty \\ \text{Fase de } \angle G(s) = -\varphi \end{cases} \quad (14)$$

El argumento φ para el contorno del plano “s” de la figura 22a, varía entre -90° y $+90^\circ$ pasando por 0° , y en la figura 22b varía entre -90° y $+90^\circ$ pasando por 180° , de manera que la imagen en el plano $G(s)$ es una semicircunferencia de radio infinito, como indica la relación (14). En la figura 24 y 25 se muestra gráficamente la idea, para los contornos mostrados en la figura 22a y 22b.

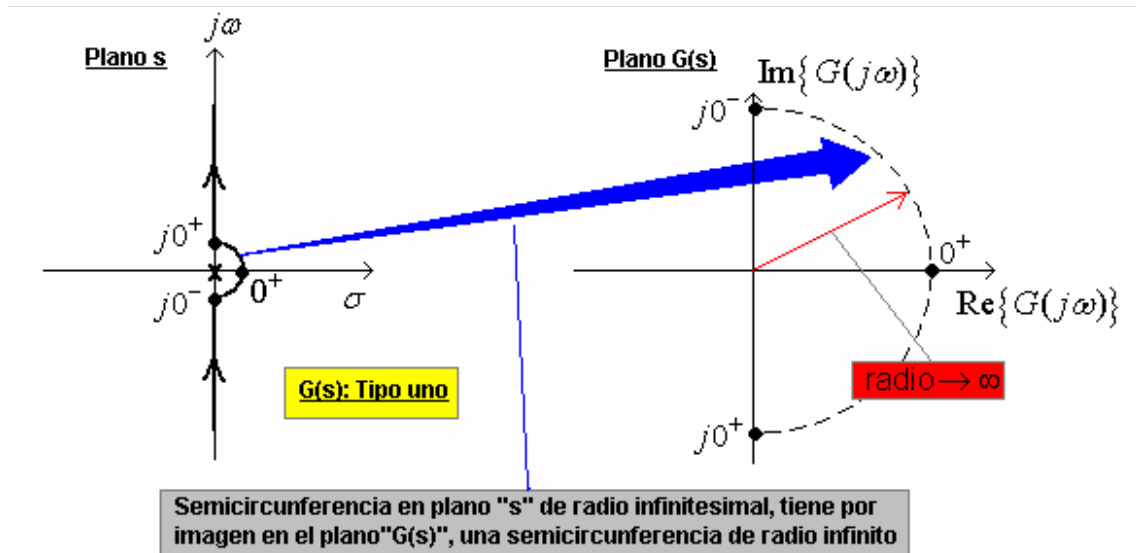


Fig. 24. Contorno que deja afuera al polo del origen (Sistema tipo 1).

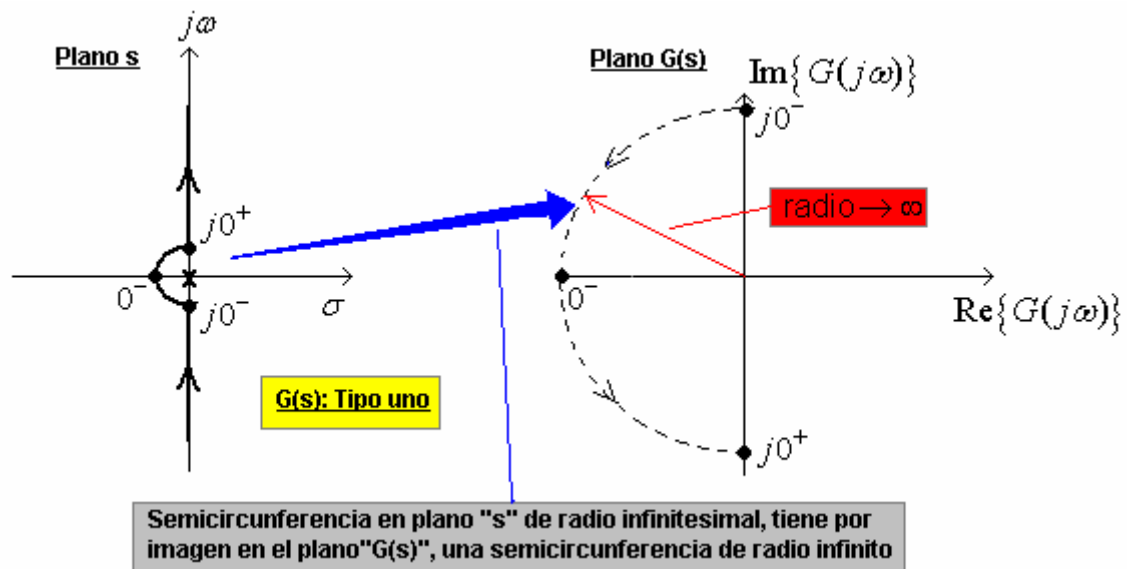


Fig. 25. Contorno que deja dentro al polo del origen (Sistema tipo 1).

Observaciones:

1) Para el contorno en el plano "s", de radio infinitesimal, que deja afuera al polo del origen, la imagen en el plano "G(s)" es una semicircunferencia de radio infinito, cuyo sentido de circulación, desde $j0^-$ a $j0^+$ es horario.

Ver figura 24.

2) Para el contorno en el plano "s", de radio infinitesimal, que deja dentro al polo del origen, la imagen en el plano "G(s)" es una semicircunferencia de radio infinito, cuyo sentido de circulación, desde $j0^-$ a $j0^+$ es antihorario.

Ver figura 25.

Sistema tipo 2 (Dos polos en el origen)

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon^2 e^{j2\varphi}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-j2\varphi} \begin{cases} \text{Módulo de } G(s) = K/\varepsilon^2 \rightarrow \infty \\ \text{Fase de } \angle G(s) = -2\varphi \end{cases} \quad (15)$$

El argumento φ , para el contorno del plano “s” en la figura 22a, varía entre -90° y $+90^\circ$ pasando por 0° , y en la figura 22b varía entre -90° y $+90^\circ$ pasando por 180° , de manera que la imagen en el plano $G(s)$ es una circunferencia de radio infinito, como indica la relación (15). En la figura 26 se muestra gráficamente la idea, para el contorno del plano s, mostrado en la figura 22a.

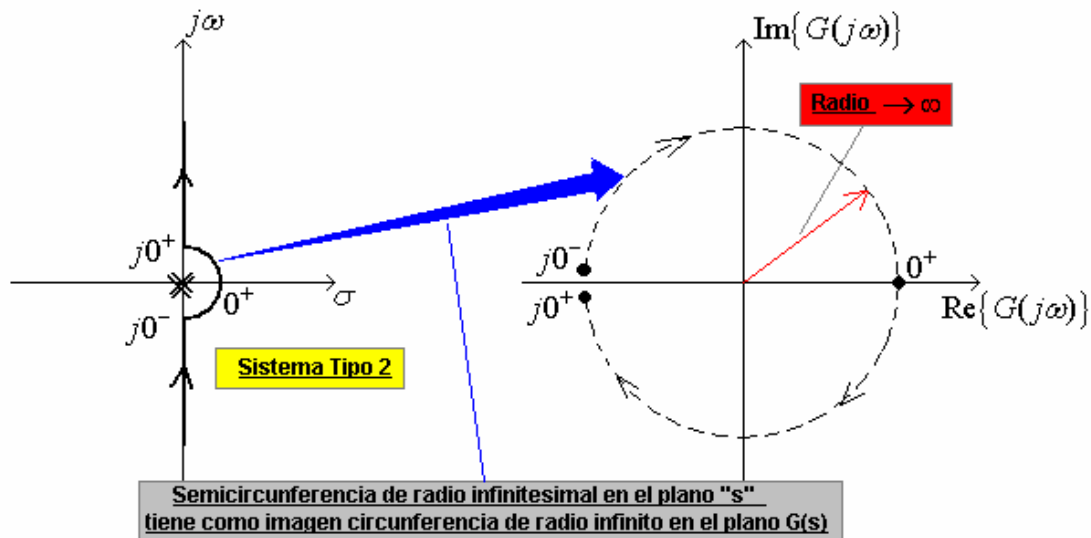


Fig. 26. Contorno en el plano “s”, que deja afuera al polo doble del origen.

Conclusión:

Para los sistemas tipo 2 de fase mínima, la imagen del contorno indicado en la figura 22a, corresponde en el plano, $G(j\omega)$, a una circunferencia de radio infinito, como se muestra en la figura 26 (sentido horario).

b) Sistemas de fase no-mínima.

Considérese un sistema de fase no-mínima como el siguiente, dado por su función transferencia:

$$G(s) = \frac{k(s + 2)}{s(s - 1)}$$

Cuando se considera el contorno en el plano "s", deberá evitarse el polo del origen (no puede haber singularidades sobre el contorno de Nyquist). Esto se realiza con una semicircunferencia de radio infinitesimal, de manera que la función G(s) se puede considerar como:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} -\frac{K}{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{K}{\epsilon e^{j\varphi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon} e^{j180^\circ} e^{-j\varphi} \begin{cases} \text{Módulo de } G(s) = K/\epsilon \rightarrow \infty \\ \text{Fase de } \angle G(s) = 180^\circ - \varphi \end{cases} \quad (16)$$

El polo en el semiplano derecho contribuye con 180°, a la fase de G(s). En la figura 27 se muestra el contorno en el plano "s", correspondiente a la figura 22a, y su imagen en el plano G(s), para la función de fase no-mínima.

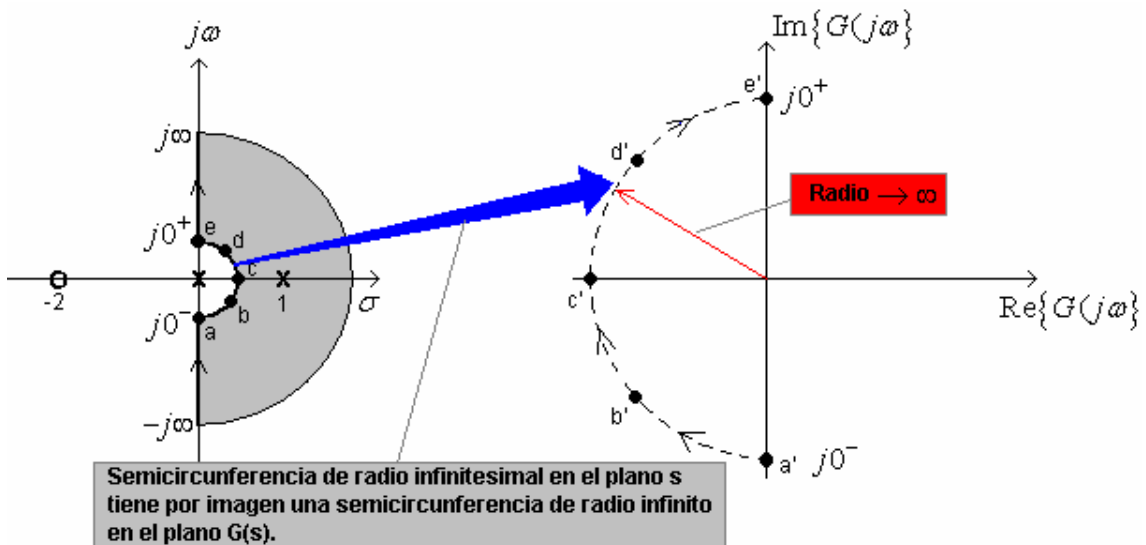


Fig. 27. Contorno en el plano "s", que deja afuera al polo del origen, e incluye al polo con parte real positiva (fase no-mínima).

Comentario

Cuando se desea obtener la imagen en el plano G(s), de un contorno tipo semicircunferencia de radio infinitesimal $s = \epsilon e^{j\varphi}$, con $\epsilon \rightarrow 0$ y φ variando desde -90° a $+90^\circ$ pasando por 0° (Fig. 22a) o por 180° (Fig.22b), es conveniente tomar valores intermedios del argumento φ , para definir el sentido de circulación de la curva imagen de radio infinito, en el plano G(s).

4. Diagrama polar directo.

Para emplear el criterio de Nyquist, se requiere graficar la respuesta en frecuencia (para $0 \leq \omega < \infty$) a lazo abierto, en un Diagrama polar directo en el plano $G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$. En la figura 28 se muestra tal plano.

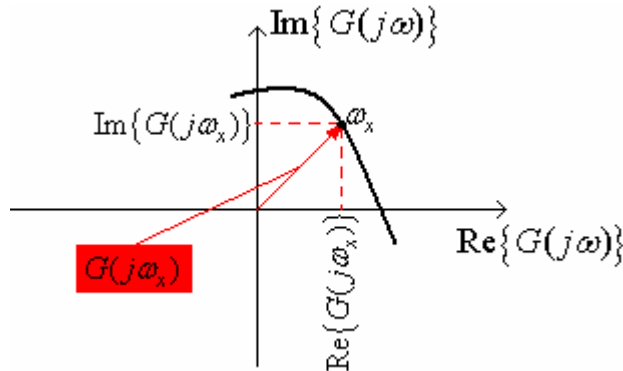


Fig. 28. Diagrama polar directo.

En la figura 28 se muestra un tramo de un contorno (como ejemplo), y se indica $G(j\omega_x)$ para la frecuencia particular ω_x , y las componentes real e imaginaria de dicho vector, es decir $\text{Re}\{G(j\omega_x)\}$ e $\text{Im}\{G(j\omega_x)\}$. Con esta idea deberemos ser capaces de trazar el contorno polar directo para cualquier función transferencia, y para el rango de frecuencias comprendido entre $0 \leq \omega < \infty$

Conociendo la función transferencia de lazo abierto $G(s)$ o $G(s)H(s)$, para trazar el diagrama polar directo, es conveniente realizar algunas consideraciones particulares que facilitan el trazado y lo ponen en escala.

Conocida $G(s)$, es necesario:

a) Calcular: $G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$

b) Calcular los puntos singulares, que corresponden a los valores mostrados en la tabla de la figura 29:

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0}=?$	$\omega_{\text{Im}=0}=?$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	=?	=?	0	=?
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	=?	=?	=?	0

Fig.29. Valores singulares.

Una vez calculados los valores indicados (con signo de pregunta) en la tabla de la figura 29, se tendrán cuatro puntos en el diagrama polar que permitirán trazar a mano alzada el gráfico $G(j\omega)$. La primera columna de la tabla da el punto de comienzo del gráfico polar (para frecuencia cero). La segunda columna da el punto de finalización del gráfico polar (para frecuencia infinita). La tercera columna da la frecuencia y el valor del punto de cruce del diagrama polar con el eje imaginario. La cuarta columna da la frecuencia y el valor del punto de cruce del diagrama polar con el eje real.

c) Con los cuatro valores calculados en (b) se puede obtener una razonable aproximación al diagrama polar. Si fuese necesario habrá que obtener el valor de $G(j\omega)$ para algunas frecuencias adicionales (En general no hará falta).

Veamos algunos ejemplos de trazados polares.

Ejemplo 1.

Sistema de segundo orden, tipo cero.

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)}$$

Reemplazando $s = j\omega$, se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(4 - \omega^2 + j5\omega)} = \frac{K(4 - \omega^2)}{(4 - \omega^2)^2 + (5\omega)^2} - j \frac{K5\omega}{(4 - \omega^2)^2 + (5\omega)^2} = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Con esta función se puede completar, para este ejemplo, la tabla de la figura 29. Ver figura 30.

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = 2$	$\omega_{\text{Im}=0} = 0$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$K/4$	0	0	$K/4$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	$K/10$	0

Fig.30. Valores singulares para el ejemplo 1.

Sobre la base de los valores de la tabla indicada en la figura 30, se puede graficar el diagrama polar de la figura 31.

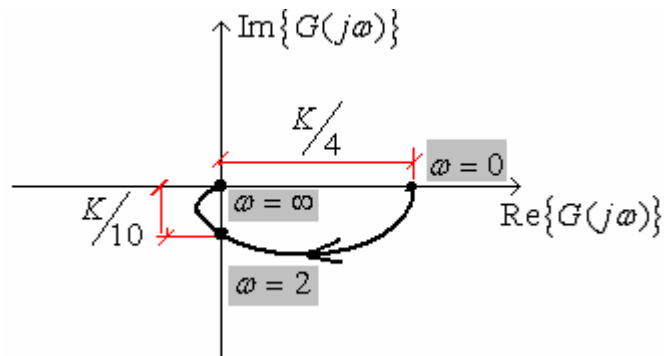


Fig. 31. Diagrama polar para el ejemplo 1.

En la figura 32 se muestra el diagrama polar, obtenido mediante MATLAB , para K=10.

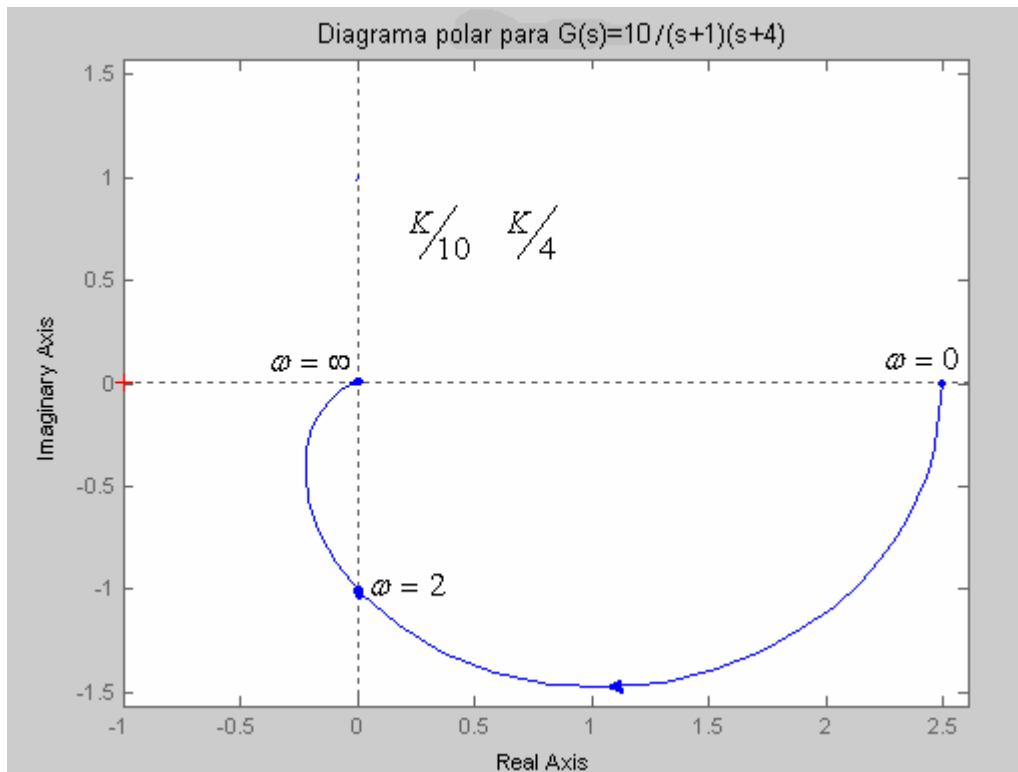


Fig. 32. Diagrama polar para el ejemplo 1, con K=10 (Mediante MATLAB).

Ejemplo 2.

Sistema de orden 2 y tipo 1.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)}$$

Reemplazando $s = j\omega$, se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2 + j4\omega} = \frac{-K\omega^2}{(-\omega^2)^2 + (4\omega)^2} - j \frac{4K\omega}{(-\omega^2)^2 + (4\omega)^2} = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Con esta función se puede completar, para este ejemplo, la tabla de la figura 29. Ver figura 33.

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = \infty$	$\omega_{\text{Im}=0} = \infty$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$K/16$	0	0	0
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	0	0

Fig.33. Valores singulares para el ejemplo 2.

Sobre la base de los valores de la tabla indicada en la figura 33, se puede graficar el diagrama polar de la figura 34.

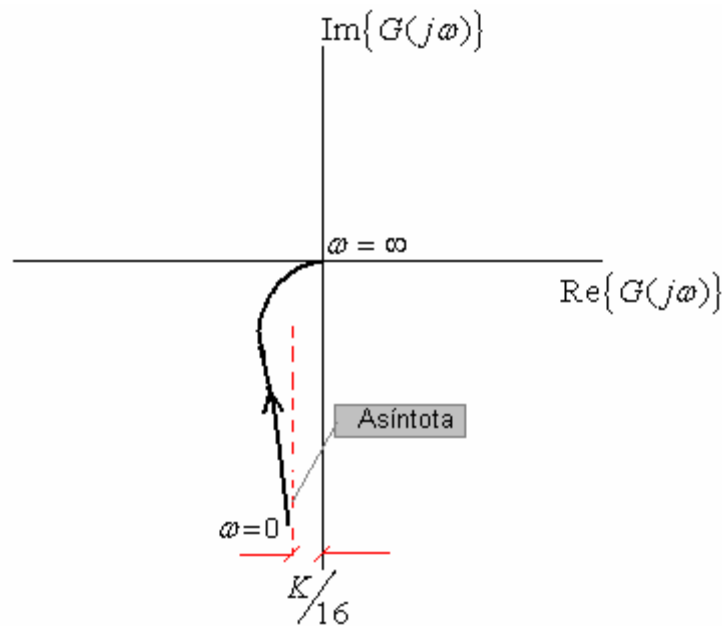


Fig. 34. Diagrama polar del ejemplo 2.

Como se puede ver en la figura 34, el diagrama polar tiene una asíntota vertical en $-K/16$.

Ejemplo 3.

Sistema tipo 1 y orden tres.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Reemplazando $s = j\omega$, se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{K}{-3\omega^2 + j2\omega - j\omega^3} = \frac{-3K\omega^2}{(-3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} - j \frac{K(2\omega - \omega^3)}{(-3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2}$$

$$= \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Con esta función se puede completar, para este ejemplo, la tabla de la figura 29. Ver figura 35.

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = 0$	$\omega_{\text{Im}=0} = \sqrt{2}$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$-3K/4$	0	0	$-K/6$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	∞	0

Fig. 35. Valores singulares del ejemplo 3.

Sobre la base de los valores de la tabla indicada en la figura 35, se puede graficar el diagrama polar de la figura 36.

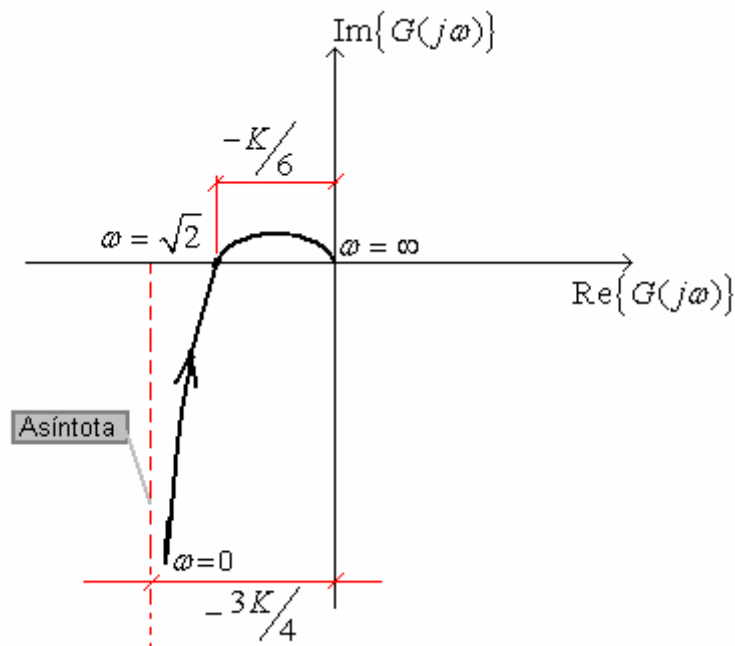


Fig.36. Diagrama polar para el ejemplo 3.

5. Margen de ganancia y margen de fase en el diagrama polar directo.

Recordando que:

Margen de fase = MF = Fase que le falta al sistema para llegar a -180° , a la Frecuencia ω_g para la cuál $|G(j\omega)|_{\omega=\omega_g} = 1(0dB)$.

En fórmula:
$$MF = 180^\circ - \angle G(\omega_g) \quad (17)$$

Margen de ganancia = MG = Ganancia que le falta al sistema para llegar a 1 (0dB), a la frecuencia ω_ϕ para la cual $\angle G(\omega_\phi) = -180^\circ$.

En fórmula:

$$MG = \frac{1}{|G(\omega_\phi)|}, \quad (\text{veces}) \quad (18)$$

$$MG(dB) = -20 \log |G(\omega_\phi)|$$

Para que el sistema sea estable, el MF debe ser positivo (en grados sexagesimales), esto significa que la fase del sistema a lazo abierto debe ser un ángulo mayor que -180° a la frecuencia de cruce de la ganancia ω_g , y el MG debe ser mayor que 0 dB ó $|G(\omega_\phi)| < 1$, a la frecuencia de cruce de la fase ω_ϕ .

En la figura 37 se muestra el MG y MF, en el diagrama polar directo.

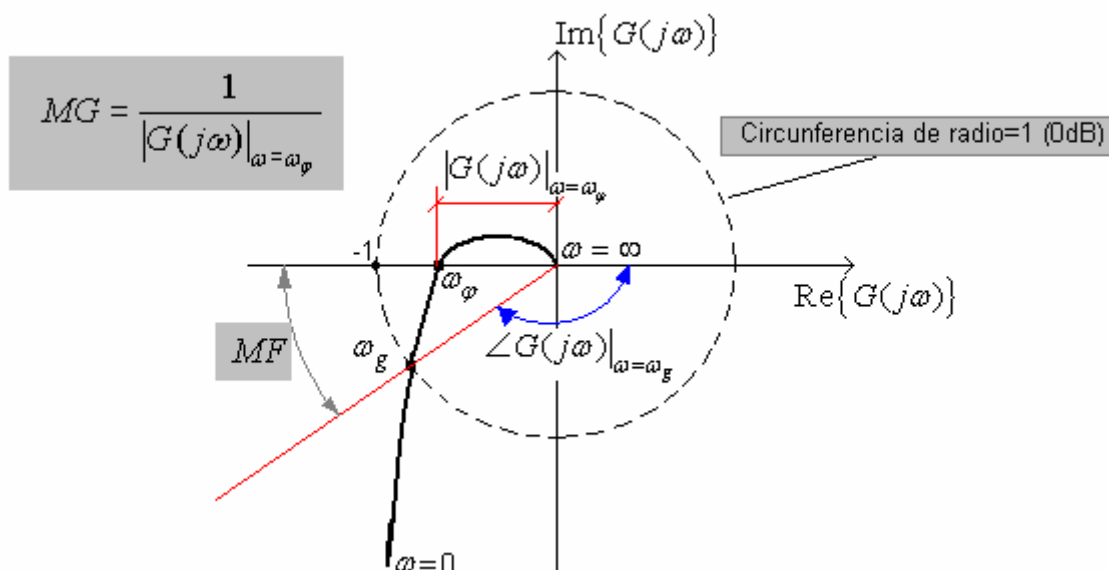


Fig. 37. MG y MF en el diagrama polar directo.

6. Criterio de Estabilidad de Nyquist.

El criterio de Nyquist permite determinar la estabilidad de un sistema a lazo cerrado empleando información a lazo abierto. Es aplicable a sistemas de fase mínima y fase no mínima, El criterio de Routh-Hurwitz también hace algo parecido, pero es bastante complicado utilizarlo para diseñar un sistema a lazo cerrado, ya que no se tiene información del margen de ganancia y fase cuando se ajusta la ganancia. Al ser el Criterio de Nyquist un método gráfico-numérico, es bastante simple utilizarlo para determinar el grado de estabilidad relativa de un sistema, mediante el empleo del margen de ganancia (MG) y margen de fase (MF), en función del ajuste de la ganancia del sistema.

Para aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist, se requiere una adecuada comprensión y fluido manejo de los conceptos vistos anteriormente en este fascículo. El procedimiento que conviene aplicar es básicamente el siguiente:

- 1º) Determinar el diagrama polar directo de $G(j\omega)$, para: $0 \leq \omega < \infty$.
- 2º) Por simetría con respecto al eje real, se determina (para frecuencias negativas) $G(j\omega)$, para: $-\infty < \omega \leq 0$
- 3º) En función del tipo de transferencia a lazo abierto, se determina el contorno de Nyquist en el plano complejo $s = \sigma + j\omega$, siendo el sentido positivo el horario [representando, también, los polos y ceros de $G(s)$]. Recordar que no puede haber polos o ceros de $G(s)$ sobre dicho contorno.
- 4º) Una vez que se tienen los puntos anteriores, se determina el contorno imagen en el plano $G(j\omega)$ [debe ser un contorno cerrado]. Sobre dicho contorno se cuentan los giros completos, múltiplos de 360° , del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, alrededor del punto $-1 + j0$. Este número de giros se designa como N . Su valor es positivo si los giros son en sentido horario, caso contrario su valor es negativo.
- 5º) Una vez completado lo anterior, se determina *el número de ceros de la ecuación característica* en el semiplano derecho, mediante la aplicación del teorema del argumento(Cauchy):

$$Z = N + P \quad (19)$$

Siendo:

P = número de polos de $G(s)$ dentro del contorno en el plano $s = \sigma + j\omega$

6º) Análisis de la ecuación (19)

Para que el sistema de control a lazo cerrado sea estable, según el criterio de Nyquist, se tiene que cumplir que $Z = 0$.

6.a) Si $P = 0$, el sistema es estable sí y solo sí $N = 0$.

6.b) Si $P \neq 0$, el sistema es estable si $N + P = 0 \Rightarrow N = -P$

Ejemplos de aplicación del criterio de Nyquist.

Ejemplo a. Determinése la estabilidad del sistema, dado por su función transferencial a lazo abierto, mediante el criterio de Nyquist. Si el sistema es estable, hallar el MG y MF.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Reemplazando $s = j\omega$, se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 7\omega^2 + j14\omega + 8} = \frac{10[(8-7\omega^2) - j(14\omega - \omega^3)]}{(8-7\omega^2)^2 + (14\omega - \omega^3)^2}$$

$$= \frac{10(8-7\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2 + (14\omega - \omega^3)^2} - j \frac{10(14\omega - \omega^3)}{(8-7\omega^2)^2 + (14\omega - \omega^3)^2}$$

Los valores singulares son:

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = \sqrt{8/7}, \infty$	$\omega_{\text{Im}=0} = \left\langle \frac{0}{\sqrt{14}} \right\rangle$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$10/8$	0	0	$10/8, 0.11$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	0	0	0.73, 0	0, 0

Sobre la base de los valores singulares, se puede dibujar el contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j\text{Im}\{G(j\omega)\}$. El contorno obtenido se muestra en la figura 38.

Para el ejemplo, se tiene:

$$P = 0$$

$$N = 0$$

Con lo cuál:

$$Z = N + P = 0 \rightarrow \text{“Sistema Estable para } K=10\text{”}$$

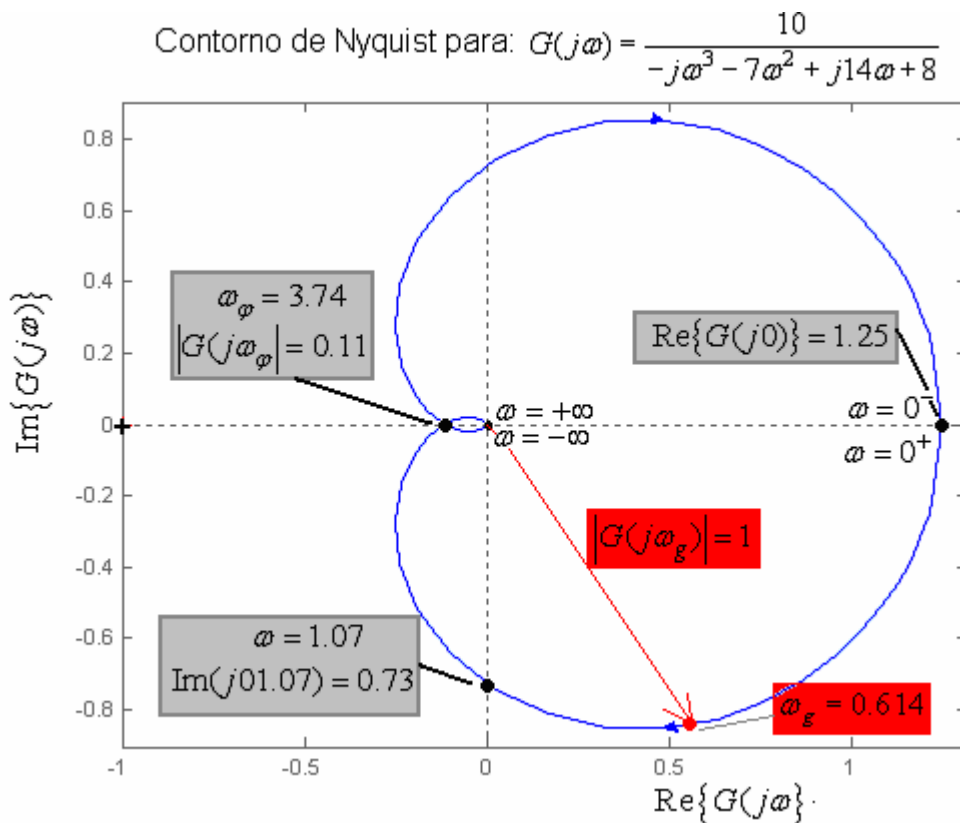


Fig. 38. Contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega)$, para el *ejemplo a*.

En la figura 38 se puede ver que la frecuencia de cruce de la fase es $\omega_\phi = 3.74 \text{ rad/seg}$, y el módulo de la función transferencia a esa frecuencia es: $|G(j\omega_\phi)| = 0.11$; sobre la base de esos valores, el margen de ganancia es:

$$MG = -20 \log |G(j\omega_\phi)| = 19.17 \text{ dB}$$

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_\phi)|} = \frac{1}{0.11} = 9.09 \text{ veces}$$

En la figura 38 se puede ver que la frecuencia de cruce de la ganancia es, $\omega_g = 0.614 \text{ rad/seg}$, y la fase de la función transferencia a esa frecuencia es:

$$\angle G(j\omega)|_{\omega=\omega_g} = \text{atan} \frac{\text{Im}\{G(j\omega_g)\}}{\text{Re}\{G(j\omega_g)\}} = \text{atan} \frac{0.844}{0.544} = 57,2^\circ; \text{ sobre la base de esos}$$

valores, el margen de fase es:

$$MF = 180^\circ - \angle G(j\omega)|_{\omega=\omega_g} = 122.8^\circ$$

Ejemplo b. Determinése la estabilidad del sistema dado por su función transferencia a lazo abierto, mediante el criterio de Nyquist. Analizar la estabilidad del mismo en función de la ganancia K . Para un valor de la ganancia que haga estable al sistema, calcúlese el MG y MF.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

Reemplazando $s = j\omega$, se determina la función transferencia frecuencial:

$$G(j\omega) = \frac{K}{-6\omega^2 + j\omega(8 - \omega^2)} = \frac{-6K\omega^2}{(-6\omega^2)^2 + [\omega(8 - \omega^2)]^2} - j \frac{K\omega(8 - \omega^2)}{(-6\omega^2)^2 + [\omega(8 - \omega^2)]^2}$$

$$= \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Sobre la base de la fórmula precedente, se pueden determinar los puntos singulares de la función frecuencial; estos se muestran en el cuadro siguiente:

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = \infty$	$\omega_{\text{Im}=0} = \begin{matrix} 0 \\ \swarrow \searrow \\ \sqrt{8} \end{matrix}$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$-6K/64$	0	0	$-6K/64, -K/48$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	0	0

Sobre la base de los valores singulares, se puede dibujar el contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$. El contorno obtenido se muestra en la figura 39.

El análisis de la estabilidad del sistema, está determinado por el valor de la ganancia K . De esta manera tendremos tres casos diferentes, que son:

- i. $K < 48$

Si la ganancia es menor que 48, el punto $-1 + j0$, en la figura 39, queda fuera del contorno cerrado del plano $G(j\omega)$, de tal manera que el número de giros del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$ en torno del punto $-1 + j0$ es cero. Así:

$$\left. \begin{matrix} N = 0 \\ P = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = N + P = 0 \rightarrow \text{"Sistema estable"}$$

ii. $K = 48$

Si la ganancia es igual a 48, el contorno del plano $G(j\omega)$ pasa sobre el punto $-1 + j0$, en este caso no se puede contar el número de giros del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, en torno del punto $-1 + j0$; por consiguiente no se puede definir el valor de N . Para considerar este punto, se debe incrementar o disminuir la ganancia un infinitésimo. Si disminuimos la ganancia en un valor $48 - \delta$; con $\delta \rightarrow 0$, el sistema es estable de acuerdo al punto anterior. Si aumentamos la ganancia en un valor $48 + \delta$; con $\delta \rightarrow 0$, el sistema es inestable, de acuerdo al punto siguiente (iii). Si se ajusta $K = 48$ (de ser posible) el sistema responde con una oscilación sostenida, frente a un cambio constante en la referencia. En este caso se dice que el sistema es **marginalmente estable**.

iii. $K > 48$

Si la ganancia es mayor que 48, el punto $-1 + j0$, en la figura 39, queda dentro del contorno cerrado del plano $G(j\omega)$, de tal manera que el número de giros del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$ en torno del punto $-1 + j0$ es 2 (sentido horario). Así:

$$\left. \begin{matrix} N = 2 \\ P = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = 2 + P = 2 \rightarrow \text{"Sistema inestable"}$$

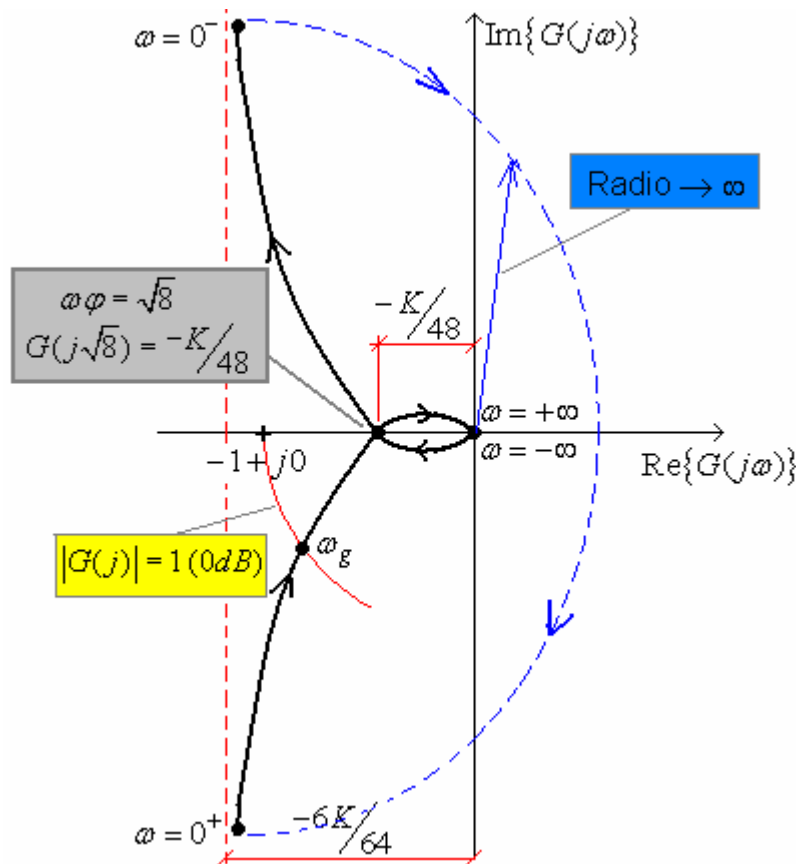


Fig.39. Contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega)$, para el ejemplo b, y $K < 48$.

Para calcular los MG y MF, se tomará un valor de la ganancia para sistema estable. Adoptamos el valor $K = 20$. Para este valor de la ganancia se obtiene:

$$\begin{aligned} |G(j\omega_\varphi)| &= K/48 \rightarrow \text{si } K = 20 \Rightarrow |G(j\omega_\varphi)| = 20/48 = 0.417 \\ MG &= -20 \log |G(j\omega_\varphi)| = 7.6 \text{ dB} \\ MF &= \frac{1}{|G(j\omega_\varphi)|} = 2.4 \text{ veces} \end{aligned}$$

Con respecto al MF, debemos determinar sobre el gráfico polar el punto de intersección de $G(j\omega)$ con la circunferencia de radio uno. Este cruce se produce a la frecuencia ω_g , para la cual $|G(j\omega_g)| = 1$, resolviendo esta ecuación se obtiene la frecuencia de cruce de la fase:

$$|G(j\omega_g)| = \frac{20}{\sqrt{36\omega_g^4 + [\omega_g(8 - \omega_g^2)]^2}} = 1 \Rightarrow \omega_g = 1.8126 \text{ rad/seg}$$

Conocida la frecuencia de cruce de la fase se calcula la parte real e imaginaria de $G(j\omega)$

$$\text{Re}\{G(j\omega_g)\} = -0.854$$

$$\text{Im}\{G(j\omega_g)\} = -0.37$$

Luego el margen de fase es:

$$MF = 180^\circ - (90^\circ + \text{atan } 0.854/0.37) = 23.4^\circ$$

Los valores calculados de los MG y MF, ratifican que el sistema dado es estable a lazo cerrado, para $K=20$. El grado de estabilidad relativa lo determinan los valores de MG y MF calculados. Frente a un problema de diseño, el proyectista debe juzgar cuales son los valores razonables del MG y MF para su sistema.

Ejemplo c. Determinése la estabilidad del sistema, dado por su función transferencia a lazo abierto, mediante el criterio de Nyquist. Analizar la estabilidad en función de la ganancia K. Adoptar un valor de ganancia que haga estable al sistema y calcúlense los MG y MF.

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s-2)}$$

Como se puede ver, el modelo del sistema dado, corresponde a un sistema de fase no-mínima y tipo cero, ya que tiene un polo con parte real positiva y no tiene polos en el origen. En la figura 40 se muestra el contorno de Nyquist a utilizar en el plano $s = \sigma + j\omega$. (Corresponde al de la figura 22a).

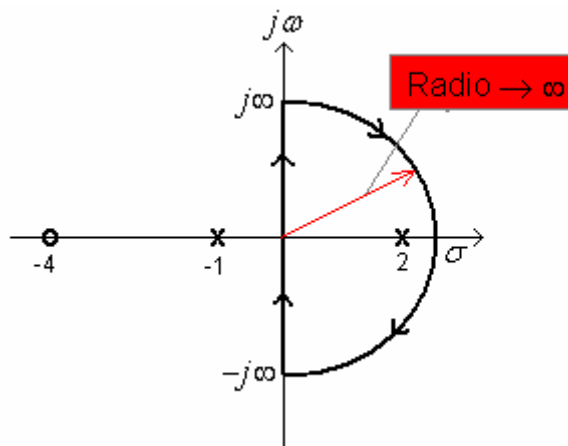


Fig.40. Contorno de Nyquist en el plano $s = \sigma + j\omega$.

Para el contorno elegido en la figura 40, resulta $P = 1$.

Reemplazando $s = j\omega$ en la función transferencia, se obtiene:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K(4 + j\omega)}{(-2 - \omega^2) - j\omega} = \frac{-K(5\omega^2 + 8)}{(2 + \omega^2)^2 + \omega^2} - j \frac{K\omega(\omega^2 - 2)}{(2 + \omega^2)^2 + \omega^2} \\ &= \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\} \end{aligned}$$

Sobre la base de la fórmula precedente, se pueden determinar los puntos singulares de la función frecuencial; estos puntos se muestran en el cuadro siguiente:

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = \infty$	$\omega_{\text{Im}=0} = \begin{matrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{matrix}$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$-2K$	0	0	$-2K, -K$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	0	0, 0

En la figura 41 se muestra el contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega)$.

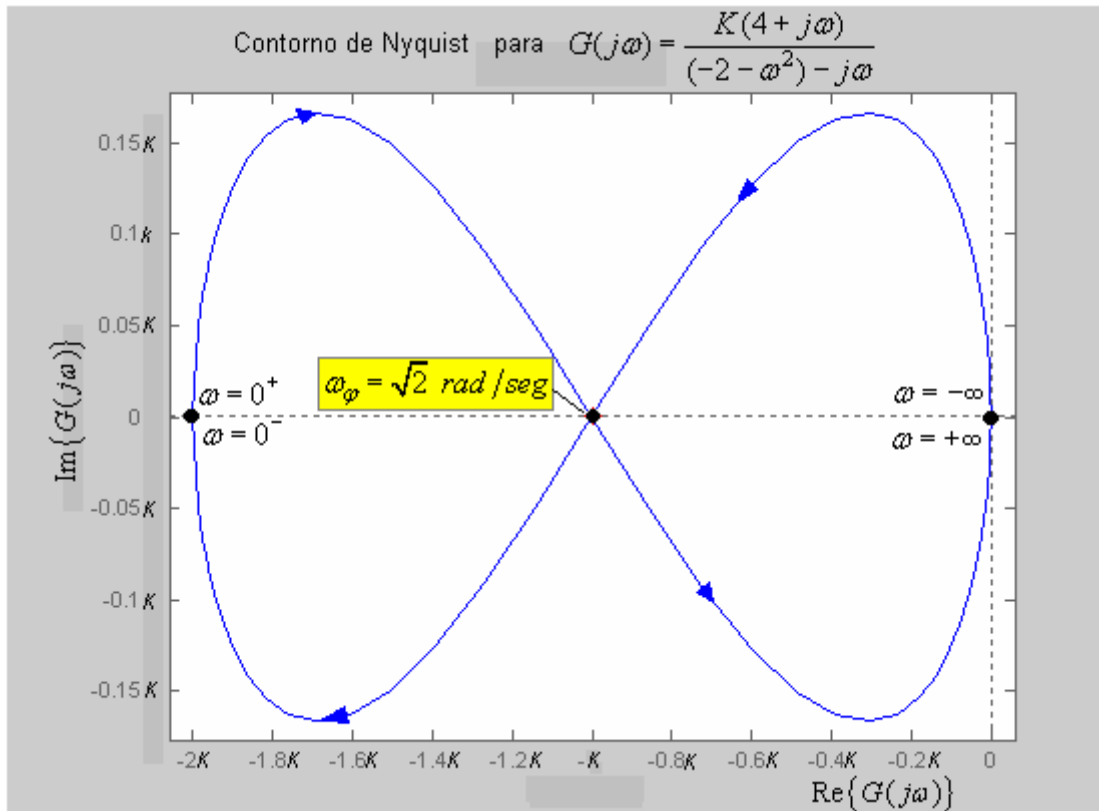


Fig. 41. Contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega)$, para el ejemplo c, en función de K .

El análisis de la estabilidad del sistema, está determinado por el valor de la ganancia K . De esta manera tendremos tres casos diferentes, que son:

1. $K > 1$

Si la ganancia es mayor que 1, el punto $-1 + j0$, en la figura 41, queda dentro de la curva cerrada entre el origen y $-K$ del plano $G(j\omega)$, de tal manera que el número de giros del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$ en torno del punto $-1 + j0$ es -1 (una vuelta en sentido antihorario). Así:

$$\left. \begin{matrix} N = -1 \\ P = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = N + P = 0 \rightarrow \text{"Sistema estable"}$$

2. $K < 1$

Si la ganancia es menor que 1, el punto $-1 + j0$ queda dentro de la curva cerrada entre $-K$ y $-2K$ del contorno cerrado del plano $G(j\omega)$, en este caso el número de giros del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, en torno del punto $-1 + j0$ es igual a 1.

$$\left. \begin{array}{l} N=1 \\ P=1 \end{array} \right\} \Rightarrow Z = N + P = 2 \rightarrow \text{"Sistema inestable"}$$

3. $K = 1$

Si la ganancia es igual a 1, el sistema es **marginalmente estable**. Frente a una referencia constante, se obtiene una oscilación sostenida a la salida.

Para determinar el MG y MF se selecciona un valor de la ganancia mayor que 1, para que el sistema sea estable, por ejemplo $K = 3$.

El margen de fase se determina calculando la parte real e imaginaria de $G(j\omega_g)$, a la frecuencia de cruce de la ganancia ω_g . Para calcular ω_g se utiliza la siguiente relación:

$$|G(j\omega_g)| = 1 = \frac{K\sqrt{4^2 + \omega_g^2}}{\sqrt{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} = \frac{3\sqrt{4^2 + \omega_g^2}}{\sqrt{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}}$$

Resolviendo la ecuación anterior de cuarto grado se obtiene una raíz real positiva como solución:

$$\omega_g = 3.8996 \text{ rad/seg}$$

Con la frecuencia ω_g , se calculan las partes real e imaginaria de $G(j\omega_g)$.

$$\text{Re}\{G(j\omega_g)\} = \frac{-K(5\omega_g^2 + 8)}{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2} = \frac{-3(5\omega_g^2 + 8)}{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2} = -0.81$$

$$\text{Im}\{G(j\omega_g)\} = \frac{-K\omega_g(\omega_g^2 - 2)}{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2} = \frac{-3\omega_g(\omega_g^2 - 2)}{(2 + \omega_g^2)^2 + \omega_g^2} = -0.50$$

El margen de fase (MF) se calcula mediante la relación:

$$MF = 180^\circ - \left(90^\circ + \text{atan} \frac{\text{Re}\{G(j\omega)\}}{\text{Im}\{G(j\omega)\}} \right) = 31.69^\circ$$

Si la ganancia se reduce hasta $K=1$, el MG se reduce a 0° , ya que para ese ajuste, la parte real e imaginaria de $G(j\omega_g)$ son iguales.

Para calcular el margen de ganancia, se requiere conocer la frecuencia de cruce de la fase ω_ϕ , es decir la frecuencia a la cuál la fase de $\angle G(j\omega_\phi) = -180^\circ$.

En la figura 41 se puede ver que dicha frecuencia es:

$$\omega_\phi = \sqrt{2} \text{ rad/seg}$$

A la frecuencia ω_ϕ , la ganancia es $K=3$, de manera que para este sistema de fase no-mínima, la ganancia puede reducirse hasta 1, antes de que el sistema comience con una oscilación sostenida en el tiempo. Esto se expresa mediante el margen de ganancia:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_\phi)|} = \frac{1}{3}, \text{ se puede reducir 3 veces la ganancia}$$

$$MG = -20 \log |G(j\omega_\phi)| = -9.54 \text{ dB}$$

La ganancia del sistema con $K=3$, se puede reducir -9.54 dB antes que el sistema tenga una oscilación sostenida a la salida.

Ejemplo d. Determinése la estabilidad del sistema, dado por su función transferencia a lazo abierto, mediante el criterio de Nyquist. Analizar la estabilidad en función de la ganancia K . Adoptar un valor de ganancia que haga estable al sistema y calcúlense los MG y MF.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s-1)}$$

Como se puede ver, el modelo del sistema dado, corresponde a un sistema de fase no-mínima y tipo uno, ya que tiene un polo con parte real positiva y un polo en el origen. En la figura 42 se muestra el contorno de Nyquist a utilizar en el plano $s = \sigma + j\omega$. (Corresponde al caso de la figura 22a).

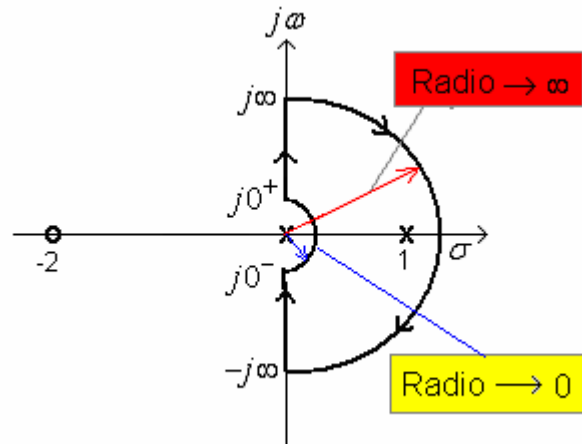


Fig. 42. Contorno de Nyquist en el plano $s = \sigma + j\omega$.

Reemplazando $s = j\omega$ en la función transferencia, se obtiene:

$$G(j\omega) = \frac{K(2 + j\omega)}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{-3K\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} - j \frac{K\omega(\omega^2 - 2)}{\omega^4 + \omega^2}$$

$$= \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \text{Im}\{G(j\omega)\}$$

Sobre la base de la fórmula precedente, se pueden determinar los puntos singulares de la función frecuencial; estos puntos se muestran en el cuadro siguiente:

ω	0	∞	$\omega_{\text{Re}=0} = 0$	$\omega_{\text{Im}=0} = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2} \end{cases}$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$-3K$	0	0	$-3K, -K$
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	∞	0	∞	0

En la figura 43, se muestra el diagrama de Nyquist en el plano $G(j\omega)$, obtenido sobre la base de los valores contenidos en el cuadro precedente. En el gráfico de la figura 43 se puede ver que hay tres posibilidades para este sistema, en función de la ganancia K .

1) $K > 1$

Si la ganancia es mayor que 1, el punto $-1 + j0$ se ubica dentro de la curva cerrada más pequeña. En estas condiciones se tiene un giro completo, en sentido antihorario del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, alrededor del punto $-1 + j0$, con lo cual $N = -1$. De esta manera:

$$\left. \begin{matrix} N = -1 \\ P = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = N + P = 0 \rightarrow \text{"Sistema estable"}$$

2) $K < 1$

Si la ganancia es menor que **1**, el punto $-1 + j0$ se ubica dentro de la curva cerrada más grande. En estas condiciones se tiene un giro completo, en sentido horario del vector $Q(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, alrededor del punto $-1 + j0$, con lo cual $N = 1$. De esta manera:

$$\left. \begin{matrix} N = 1 \\ P = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Z = N + P = 2 \rightarrow \text{"Sistema inestable"}$$

3) $K = 1$

Cuando la ganancia toma el valor $K = 1$, el sistema es **marginalmente estable**, lo cuál significa que frente a una referencia escalón constante, la salida del sistema oscila en forma permanente y sostenida.

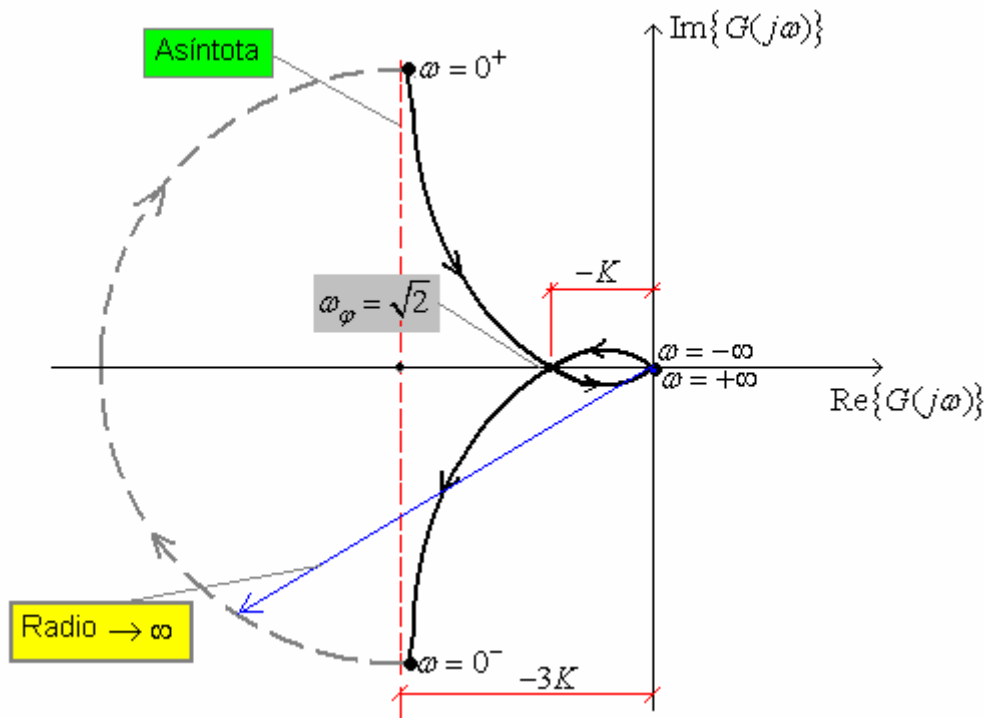


Fig.43. Contorno de Nyquist en el plano $G(j\omega)$, para el ejemplo d.

Para determinar el MG y MF se selecciona un valor de la ganancia que haga estable al sistema, por ejemplo $K = 3$.

El margen de fase se determina calculando la parte real e imaginaria de $G(j\omega_g)$, a la frecuencia de cruce de la ganancia ω_g . Para calcular ω_g se utiliza la siguiente relación

$$|G(j\omega_g)| = 1 = \frac{K\sqrt{4+\omega_g^2}}{\sqrt{(\omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} = \frac{3\sqrt{4+\omega_g^2}}{\sqrt{(\omega_g^2)^2 + \omega_g^2}}$$

Resolviendo la ecuación precedente, se calcula ω_g , resultando

$$\omega_g = 3.5791 \text{ rad/seg}$$

Ahora es necesario calcular la parte real e imaginaria de $G(j\omega_g)$:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega_g)\} = \frac{-3K\omega_g^2}{\omega_g^4 + \omega_g^2} = -0.65$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega_g)\} = -\frac{K\omega_g(\omega_g^2 - 2)}{\omega_g^4 + \omega_g^2} = -0.66$$

El margen de fase, se determina mediante, la relación siguiente:

$$MF = 180^\circ - \left(90^\circ + a \tan \frac{\operatorname{Re}\{G(j\omega_g)\}}{\operatorname{Im}\{G(j\omega_g)\}} \right) = 45^\circ$$

El margen de ganancia MG, requiere el cálculo de la frecuencia de cruce de la ganancia ω_ϕ . En la figura 43, junto al cuadro que indica los valores singulares de $G(j\omega)$, se tiene que:

$$\omega_\phi = \sqrt{2} \text{ rad/seg}$$

Para este valor de la frecuencia, se obtiene el valor de $G(j\omega_g) = -K$, con lo cual: $|G(j\omega_g)| = K = 3$.

A la frecuencia ω_ϕ , la ganancia es $K=3$, de manera que para este sistema de fase no-mínima, la ganancia puede reducirse hasta 1, antes de que el sistema comience con una oscilación sostenida en el tiempo. Esto se expresa mediante el margen de ganancia:

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_\phi)|} = \frac{1}{3}, \text{ se puede reducir 3 veces la ganancia}$$

$$MG = -20 \log |G(j\omega_\phi)| = -9.54 \text{ dB}$$

La ganancia del sistema con $K=3$, se puede reducir -9.54 dB, antes que el sistema tenga una oscilación sostenida a la salida.