

## I. Introducción.

En estas, “*consideraciones para el análisis y diseño de sistemas de control*”, continuos y LTI, se tienen en cuenta algunas de las relaciones matemáticas y conceptuales, que se requieren, a la hora de diseñar un sistema de control. Si bien muchas de ellas se encuentran en la bibliografía, en general están dispersas y muchos autores las consideran incorporadas al lector (que suponen está en tema); otras son contribuciones personales, adaptadas a las necesidades de estas páginas. Un aspecto que no debe dejarse de lado, es la estrecha relación existente entre el Margen de Fase (MF o PM) y el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ). En estas notas se le dedica atención particular a esta cuestión.

También, se le dedica atención a la influencia de un tercer polo real (en lazo cerrado) sobre la respuesta temporal y sobre el MF. Asimismo se presta atención a la presencia de ceros en la transferencia a lazo cerrado, que ocasionan comportamientos inadecuados sobre la salida, debido a cambios tipo escalón en la referencia. Esta cuestión lleva a la necesidad de corregir las acciones de control derivativas puras.

Adicionalmente se considera la respuesta frecuencial de un sistema de segundo orden subamortiguado, por la importancia que tienen el pico, la frecuencia a la cuál se produce, el ancho de banda, y su relación con el coeficiente de amortiguamiento. Este aspecto es importante, por ejemplo, al diseñar un sistema de control a lazo cerrado utilizando las cartas de Nichols o Bode.

Se incluyen abundantes gráficos, con el fin que los estudiantes, puedan fijar adecuadamente los conceptos, y se vea facilitado (por el criterio de ingeniería) el uso del material para propósitos de análisis y diseño.

## II. Relación entre el Margen de Fase (MF) [o PM en inglés] obtenido mediante Bode y mediante el lugar de Raíces.

Es bastante frecuente utilizar el Margen de Fase (MF), como uno de los parámetros importantes, en el análisis y diseño de sistemas de control. Para los sistemas continuos y LTI (en general simples), es muy común emplear el Lugar de Raíces o los diagramas de Bode para realizar los diseños. En la tarea de diseño, muchas veces se presenta la necesidad de conocer el margen de fase en función del coeficiente de amortiguamiento de un sistema, cuando se trabaja en el dominio temporal (Lugar de raíces) o viceversa, cuando se está trabajando en el dominio frecuencial (Bode, Nichols, etc.). Así, cuando se está diseñando un sistema con el gráfico de Bode, se tiene una idea cabal del MF, pero el proyectista desearía tener la misma idea sobre el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ), pero no la tiene. De la misma manera, cuando se está diseñando un sistema con el Lugar de Raíces, se tiene una idea cabal del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ), pero no se la tiene respecto del MG.

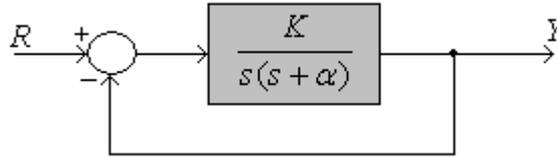
Una práctica frecuente, es diseñar el sistema de control, para que su respuesta a lazo cerrado se aproxime a un sistema subamortiguado de segundo orden ( $0 < \xi < 1$ ), ya que de esta manera se tiene una aproximación al sistema óptimo (mínimo índice de comportamiento ITAE, ISE, Cuadrático, etc.). Esta situación lleva a que el sistema a lazo cerrado, tenga dos polos complejos dominando la respuesta ya sea un sistema de segundo orden ( $n=2$ ) o de orden mayor a dos ( $n>2$ ).

Debido a la consideración de diseño mencionada anteriormente, es muy útil para facilitar los trabajos de diseño, considerar sistemas de orden  $n=2$  con polos

complejos y sistemas de tercer orden  $n=3$ , el cuál tiene dos raíces complejas dominantes y una tercer raíz real.

**II.a. Sistema de segundo orden (n=2)**

En la figura 1 se muestra un sistema de control de segundo orden.



**Fig. 1.** Sistema de segundo orden.

La transferencia a lazo cerrado del sistema mostrado en la figura 1 está dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + \alpha s + K} \tag{1}$$

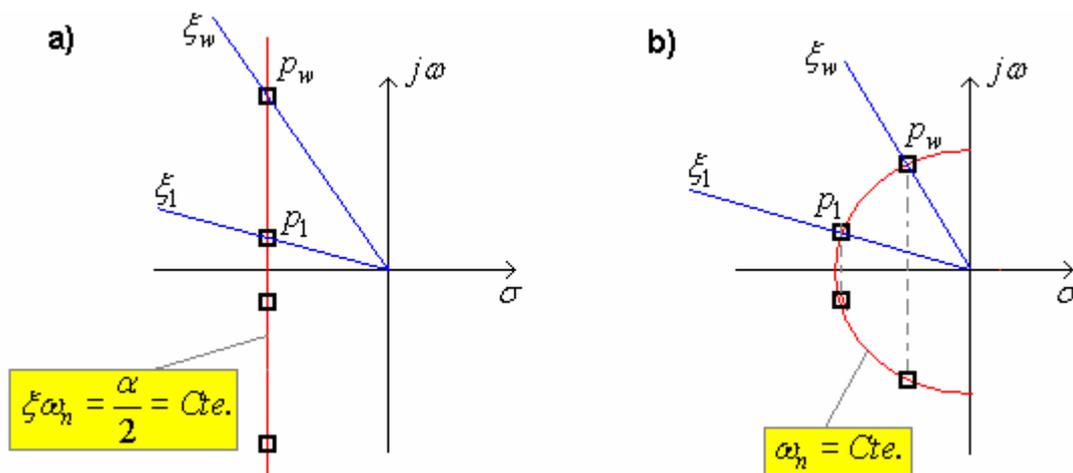
El coeficiente  $\alpha$  en la ecuación (1), es muy frecuente asociarlo con el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema, de la siguiente manera:

$$\alpha = 2\xi\omega_n \tag{2}$$

Para fines de análisis y diseño es útil considerar sistemas de segundo orden subamortiguados, que tengan:

- $\xi\omega_n = \text{Constante.}$
- $\omega_n = \text{Constante}$

Las limitaciones anteriores, para los dos polos complejos del sistema, se muestran en el gráfico de la figura 2.



**Fig.2.** (a) Polos para  $\xi\omega_n = \frac{\alpha}{2} = Cte.$ ; (b) polos para  $\omega_n = Cte.$

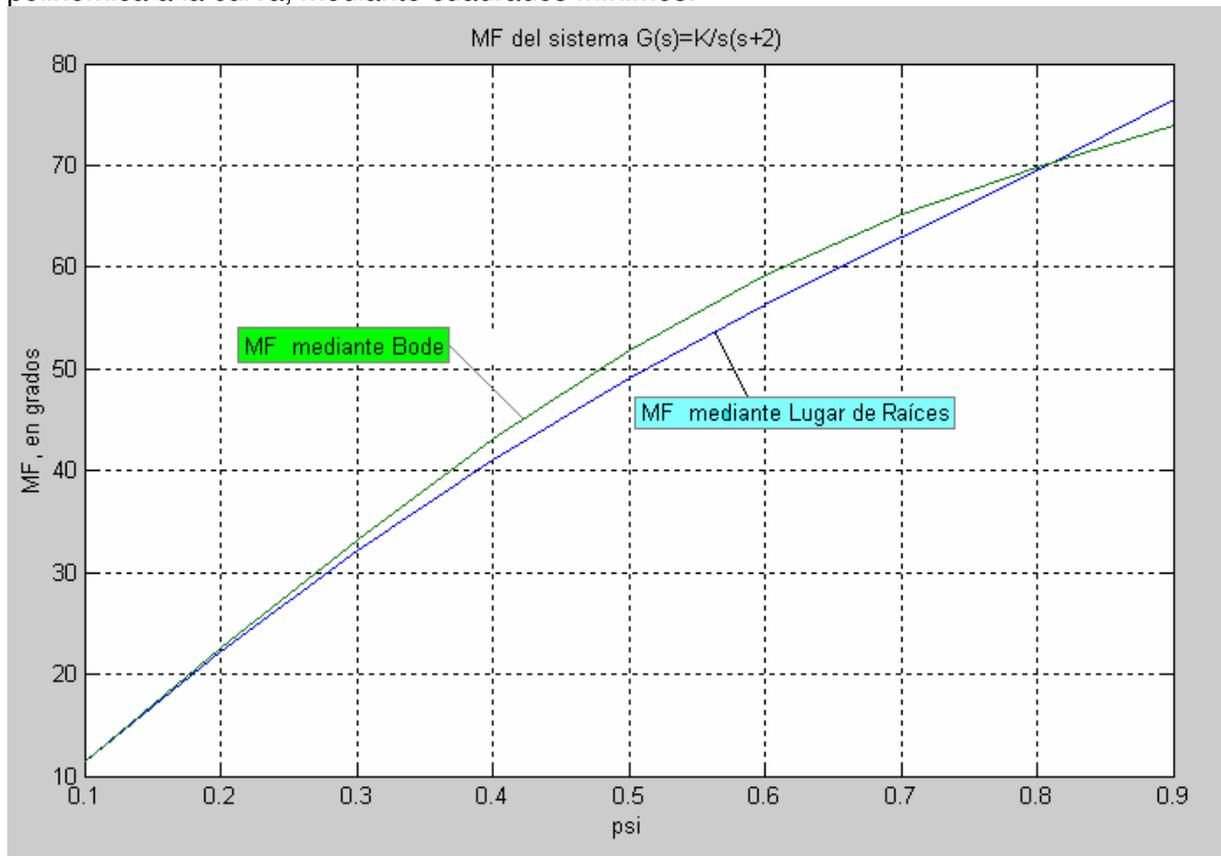
Mantener los polos de lazo cerrado como muestra la figura 2a, significa que cualquiera sea la ubicación sobre la vertical, el sistema tiene el mismo tiempo de establecimiento ( $t_s = 4/\xi\omega_n$ , para el 2%).

Mantener los polos de lazo cerrado como muestra la figura 2b, significa que cualquiera sea la ubicación sobre la semicircunferencia, el sistema tiene el mismo ancho de banda (ancho de banda  $\cong \omega_n$ ).

Analizaremos para el sistema de 2º orden subamortiguado, la relación entre el margen de fase (MF) y el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ), y el resultado lo representaremos en un gráfico, y al mismo tiempo, se tratará de obtener una relación matemática de aproximación (simple de utilizar), mediante cuadrados mínimos. Como  $\xi\omega_n = \alpha/2 = Cte.$ , se selecciona un valor determinado y a la vez simple para los cálculos. En este caso, se selecciona  $\xi\omega_n = \alpha/2 = 1$ , y se considerará un sistema de segundo orden tipo 1.

En la figura 3 se muestra la variación del MF, calculado mediante el gráfico de Bode y mediante el Lugar de Raíces. En dicha figura se puede observar que para coeficientes de amortiguamiento comprendidos entre 0.1 y 0.3 las dos curvas dan prácticamente el mismo resultado. Para coeficientes de amortiguamiento entre 0.3 y 0.8 el cálculo mediante el Lugar de Raíces da valores ligeramente inferiores al calculado mediante Bode. A partir de coeficientes de amortiguamiento superiores a 0.8, el cálculo mediante Bode da valores de MF ligeramente inferiores al calculado por medio del Lugar de raíces.

Para emplear una correlación aproximada entre el MF y el coeficiente de amortiguamiento que sea útil para el diseño, se efectuará un cálculo de los valores promedio del MF en función de  $\xi$ , entre los dos métodos de cálculo, y luego se obtendrá una aproximación polinómica a la curva, mediante cuadrados mínimos.

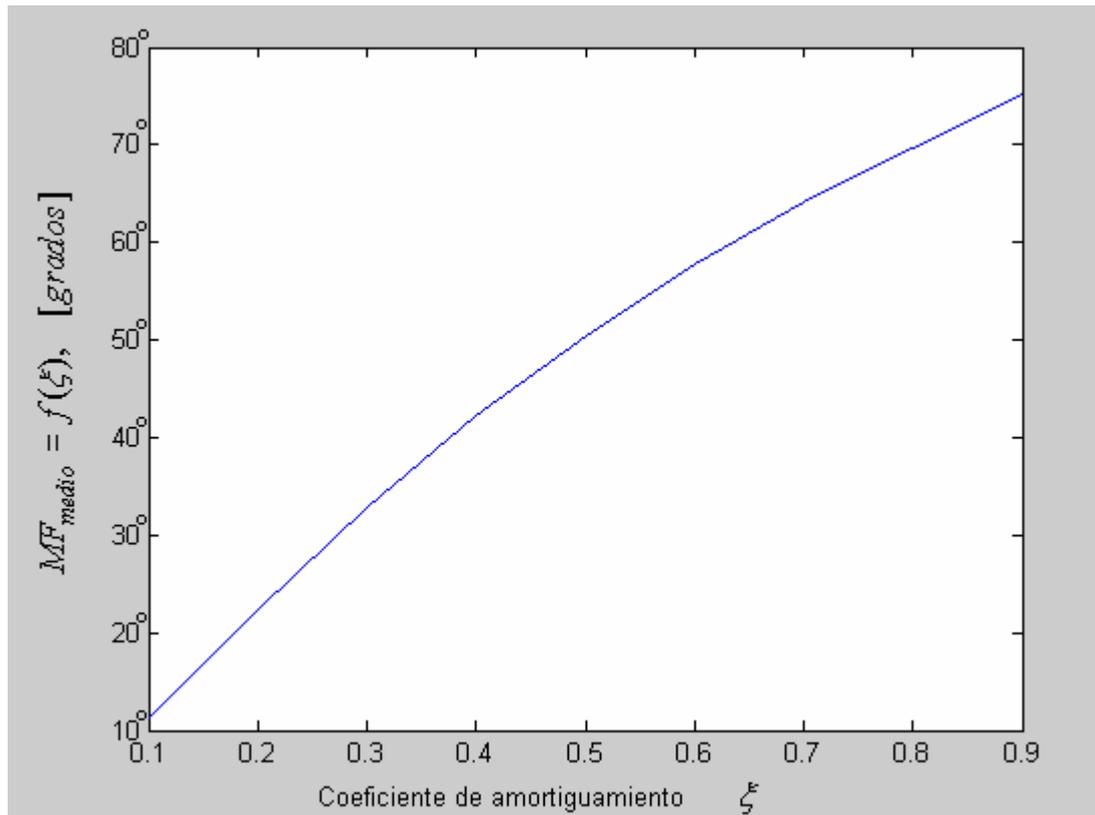


**Fig.3.** Margen de fase (MF) en función de  $\xi$ , calculados mediante Bode y Lugar de Raíces, para un sistema con  $\xi\omega_n = Cte.$

En la figura 4, se muestra la curva de los valores promedios del margen de ganancia en función del coeficiente de amortiguamiento, es decir  $MF_{medio} = f(\xi)$ , para un sistema con  $\xi\omega_n = Cte$ .

Una vez que se dispone de la curva dada por el gráfico de la figura 4, se procede a determinar un polinomio aproximador, mediante el método de los cuadrados mínimos. En este caso se ha considerado razonable, emplear un polinomio aproximador de segundo grado, de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad \text{polinomio aproximador (3)}$$



**Fig. 4.** MF medio en función de  $\xi$ , para un sistema con  $\xi\omega_n = Cte$ .

Realizados los cálculos de los coeficientes del polinomio aproximador (3), mediante cuadrados mínimos, se ha obtenido:

$$MF(\xi) = -0.4981 + 123.9076\xi - 44.6306\xi^2 \quad (4)$$

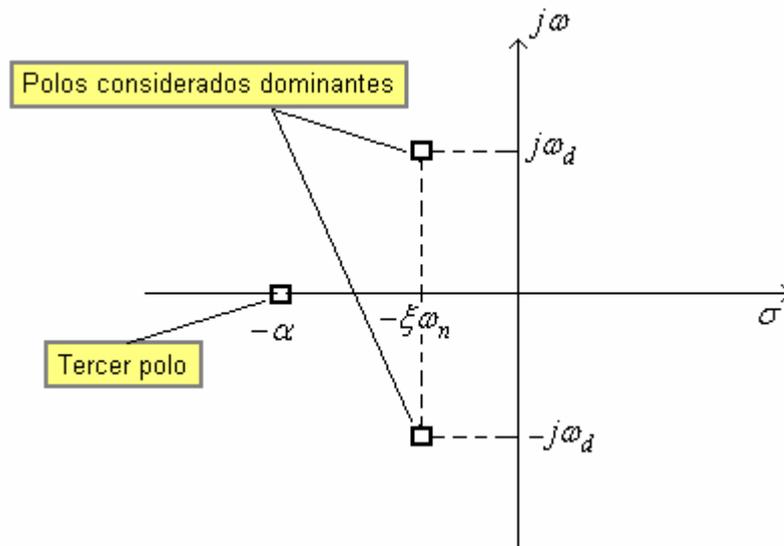
$$\leq 0.1\xi \leq 0.9$$

Esta fórmula es válida para un sistema de segundo orden subamortiguado.

Toda vez que se desee diseñar un sistema de control, que tenga polos complejos dominantes, se puede utilizar la fórmula (4), para estimar el MG en función del coeficiente de amortiguamiento, cuando se ajusta la ganancia.

## II.b. Efecto de un tercer polo sobre la respuesta temporal a lazo cerrado, con relación a un sistema de 2º orden subamortiguado.

Un caso frecuente, que se encuentra en los problemas de diseño, es la presencia de un tercer polo a lazo cerrado. La influencia de este tercer polo, depende de su ubicación en relación a los polos complejos, considerados dominantes, de manera que una primera consideración, será determinar la respuesta temporal de tal sistema a lazo cerrado, en función de la localización del tercer polo. Para ello considérese el diagrama de polos indicado en la figura 5.



**Fig. 5.** Sistema de tercer orden. Polos a lazo cerrado.

La función transferencial del sistema a lazo cerrado, bajo consideración, es de la forma:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s + \alpha)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (5)$$

Se considerarán valores de  $\alpha$  (coordenada del tercer polo) con las ubicaciones siguientes:  $\alpha = 10\xi\omega_n, 8\xi\omega_n, \dots, \xi\omega_n$ . Estas ubicaciones, darán una clara idea de la influencia del tercer polo, sobre la respuesta temporal del sistema ante un cambio escalón en la referencia.

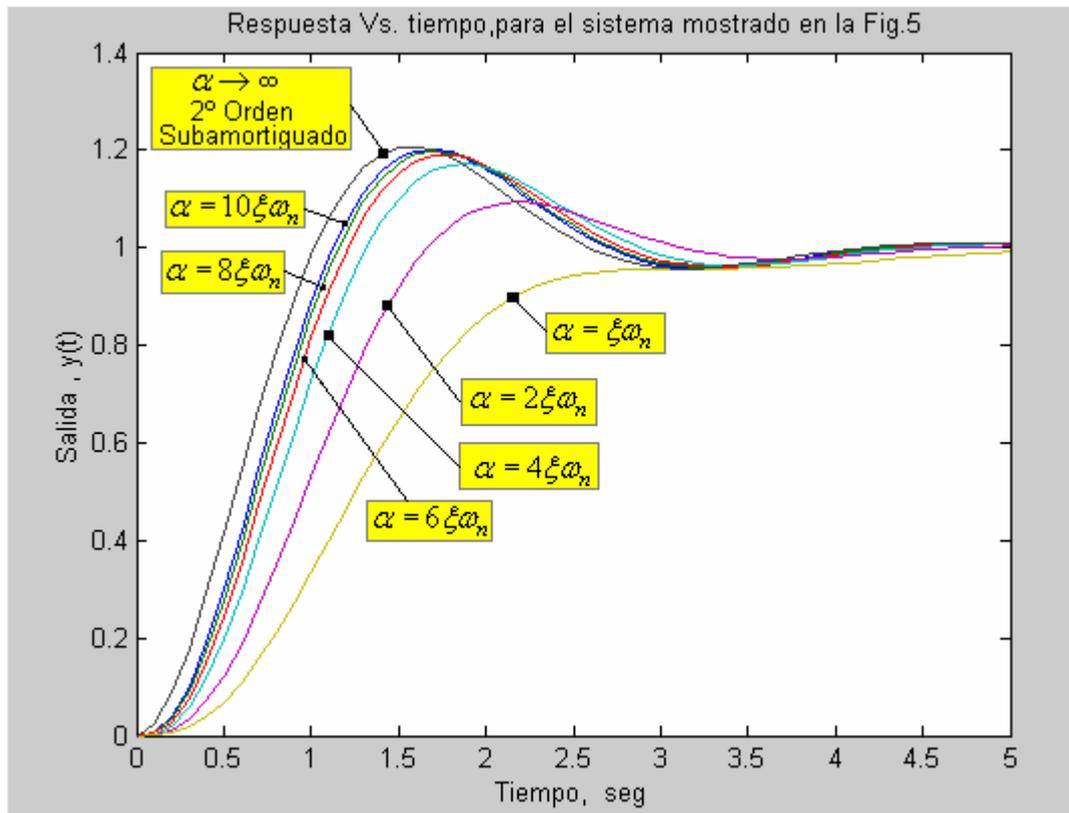
Para obtener un gráfico comparativo, con fines de diseño, se elegirán los polos complejos del sistema a lazo cerrado como:  $s_{1,2} = -1 \pm j2$  y la coordenada del tercer polo se tomará de la forma mencionada precedentemente.

En la figura 6 se muestra un gráfico comparativo de la respuesta para un sistema de tercer orden, como el indicado en la figura 5, en relación a la coordenada real del tercer polo ( $\alpha$ ).

Como se observa en la figura 6, la parte real del tercer polo debe ser mayor que 6 veces, la parte real de los polos considerados dominantes, es decir:  $\alpha > 6\xi\omega_n$ . Esto significa que para fines de diseño, los errores cometidos, en los parámetros que

caracterizan la respuesta temporal  $(\xi, \omega_n, t_s, M_o, t_r)$ , están dentro del rango de exactitud del modelo del sistema (exactitud de ingeniería), si se considera:

$$\alpha > 6\xi\omega_n \quad (6)$$



**Fig.6.** Efecto de un tercer polo sobre la respuesta temporal vs.  $\alpha$ .

### III. Margen de Fase para un sistema como el indicado en la figura 5. (Dos polos complejos y uno real, a lazo cerrado.)

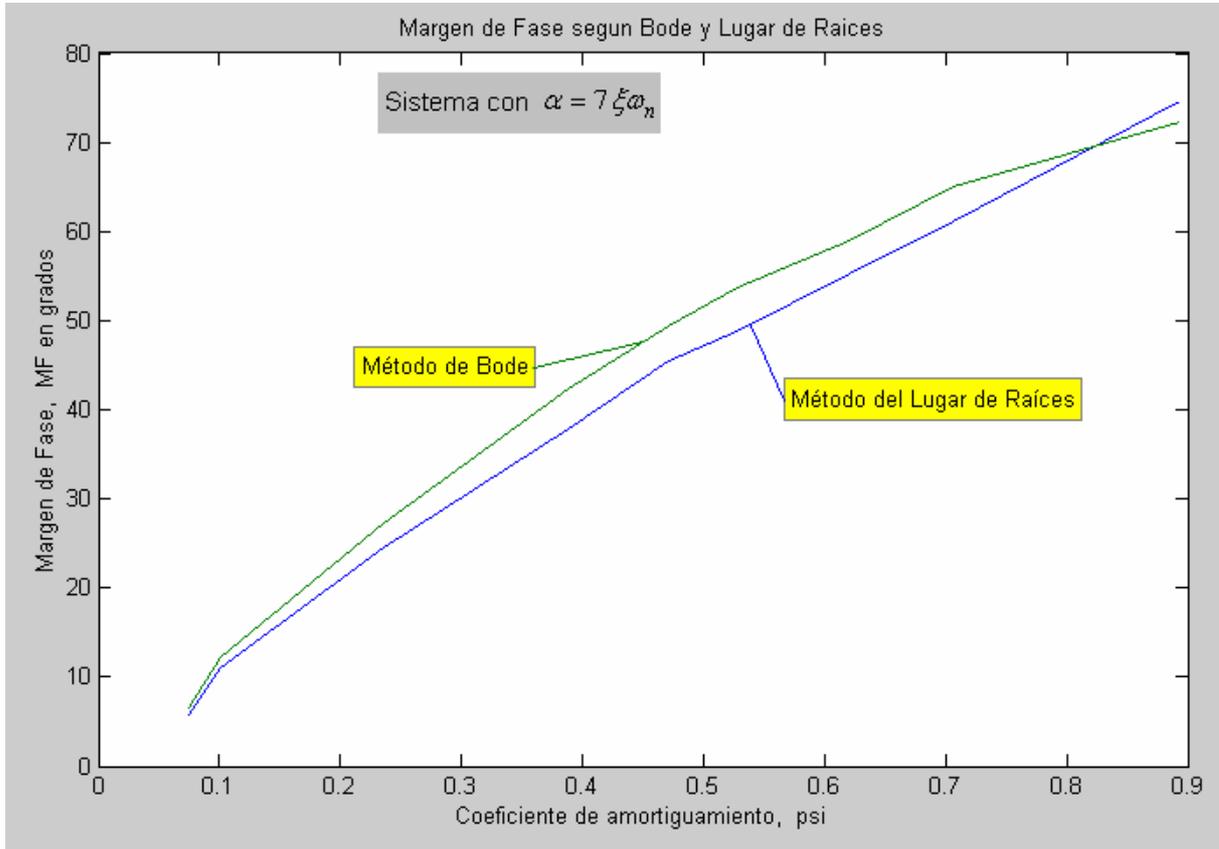
#### III.a. Sistema con tres polos a lazo cerrado.

**Dos polos complejos dominantes. ( $\alpha = 7\xi\omega_n$ ).**

Para un sistema como el mostrado en la figura 5, se determinará el MF mediante Bode y Lugar de Raíces. El sistema bajo análisis tiene la parte real de la tercer raíz igual a 7 veces la parte real de las raíces complejas ( $\alpha = 7\xi\omega_n$ ). De las curvas obtenidas se calculará el valor medio y sobre la base de ello se determinará un polinomio aproximador, que nos permitirá disponer de una fórmula para uso en los

problemas de diseño. En la figura 7 se muestra el MF del sistema en consideración, calculado mediante la aplicación de Bode y mediante el Lugar de Raíces.

Utilizando las curvas de la figura 7, se determina una curva media de ambos métodos y con los valores de la misma, se calcula un polinomio aproximador mediante el método de los cuadrados mínimos, a los efectos de disponer de una relación matemática para calcular el MG en función del coeficiente de amortiguamiento.



**Fig. 7.** Margen de fase (MF, grados) calculado mediante Bode y Lugar de Raíces.

Realizados los cálculos de los coeficientes del polinomio aproximador (3), mediante cuadrados mínimos, se ha obtenido:

$$MF(\xi) = -1.4039 + 124.03 \xi - 45.5756 \xi^2 \quad (7)$$

$$\leq 0.1 \xi \leq 0.9$$

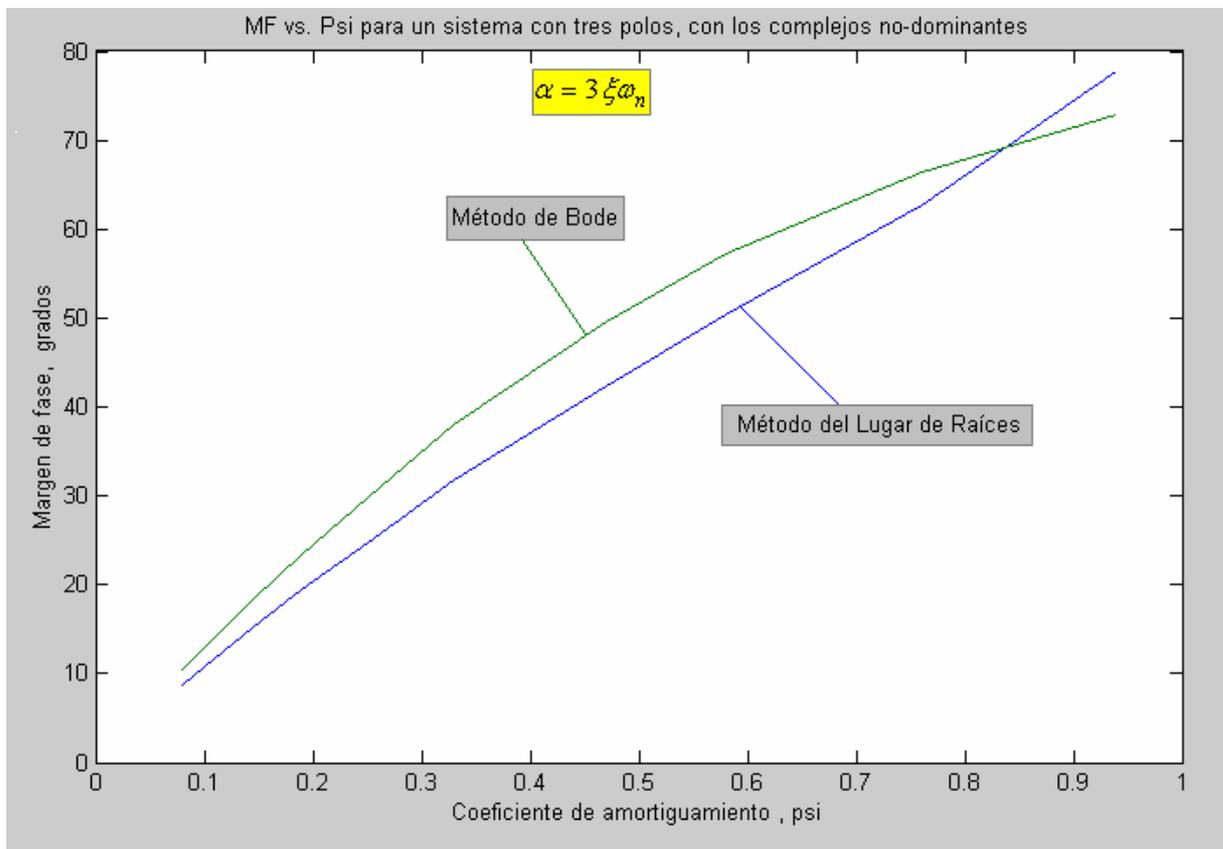
Esta fórmula, es válida para un sistema de tercer orden, con dos raíces complejas dominantes. Toda vez que se desee diseñar un sistema de control, que tenga tres polos a lazo cerrado, dos de los cuales son complejos y dominantes, se puede utilizar la fórmula (7), para estimar el MG en función del coeficiente de amortiguamiento, cuando se ajusta la ganancia.

**III.b. Sistema con tres polos a lazo cerrado.  
Dos polos complejos No-dominantes. ( $\alpha = 3\xi\omega_n$ ).**

El sistema bajo análisis, tiene la parte real de la tercer raíz, igual a 3 veces la parte real de las raíces complejas ( $\alpha = 3\xi\omega_n$ ). De las curvas obtenidas se calculará el valor medio y sobre la base de ello se determinará un polinomio aproximador, que nos permitirá disponer de una fórmula para uso en los problemas de diseño.

En la figura 8, se muestra el MF del sistema bajo consideración, calculado mediante la aplicación de Bode y mediante el Lugar de Raíces.

Utilizando las curvas de la figura 8, se determina una curva media de ambos métodos y con los valores de la misma, se calcula un polinomio aproximador mediante el método de los cuadrados mínimos, a los efectos de disponer de una relación matemática para calcular el MG en función del coeficiente de amortiguamiento.



**Fig. 8.** Margen de fase (MF, grados) calculado mediante Bode y Lugar de Raíces.

Realizados los cálculos de los coeficientes del polinomio aproximador (3), mediante cuadrados mínimos, se ha obtenido:

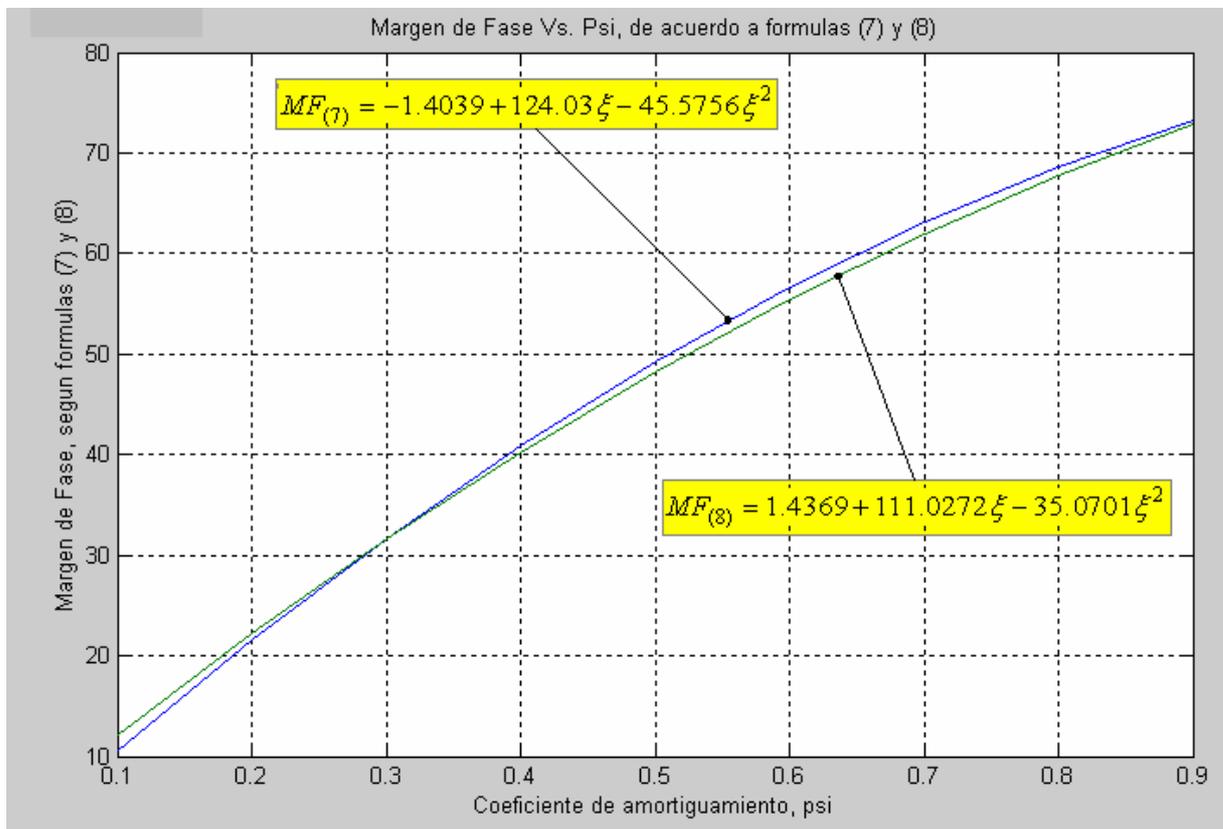
$$MF(\xi) = 1.4369 + 111.0272 \xi - 35.0701 \xi^2 \quad (8)$$

$$\leq 0.1\xi \leq 0.9$$

Esta fórmula, es válida para un sistema de tercer orden, con dos raíces complejas no-dominantes. Toda vez que se desee diseñar un sistema de control, que tenga tres polos a lazo cerrado, dos de los cuales son complejos y no-dominantes, se puede utilizar la fórmula (8), para estimar el MG en función del coeficiente de amortiguamiento, cuando se ajusta la ganancia.

### III.c. Comparación de las fórmulas (7) y (8).

En lo que sigue, se compararán los resultados obtenidos, en el cálculo del Margen de Fase (MF) en función del coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ), empleando las dos fórmulas (7) y (8), obtenidas anteriormente, mediante el empleo de un polinomio aproximador, utilizando el método de los cuadrados mínimos. Considerando que el coeficiente de amortiguamiento varía, normalmente, entre 0.1 y 0.9 es decir,  $0.1 \leq \xi \leq 0.9$ , se muestra en la figura 10, los resultados obtenidos.



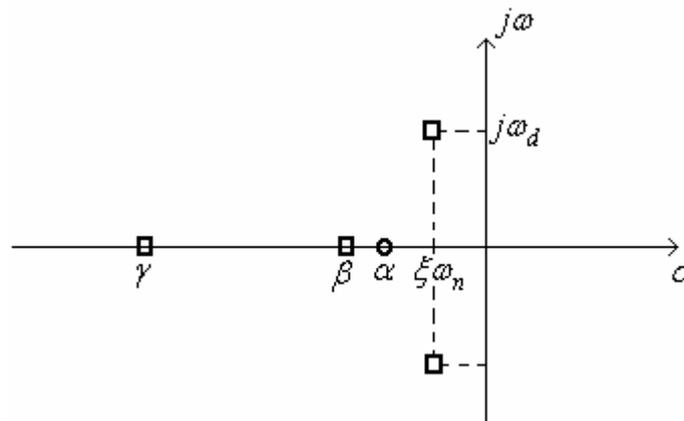
**Fig. 10.** Margen de fase en función de  $\xi$  según fórmulas (7) y (8).

Los resultados obtenidos mediante la aplicación de las fórmulas (7) y (8), que se muestran en la figura 10, permiten afirmar que el margen de fase difiere como máximo  $|MF_{(7)} - MF_{(8)}| \leq 1.5^\circ$ . Este error se puede considerar como pequeño en la mayoría de los problemas de diseño, de manera que el cálculo del MG, en función

del coeficiente de amortiguamiento, para un sistema de tercer orden, con dos polos complejos y uno real, se puede realizar indistintamente mediante la fórmula (7) u (8)

#### IV. Sistema con cuatro polos y un cero (de la planta) a lazo cerrado.

Se considerará el caso frecuente, de un sistema a lazo cerrado que tiene cuatro polos y un cero (debido a la planta), ubicados como se muestra en la figura 11.



**Fig.11.** Sistema de cuarto orden con un cero, a lazo cerrado.

De acuerdo a la figura 11, la función transferencia del sistema a lazo cerrado es:

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s + \alpha)}{(s + \gamma)(s + \beta)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (9)$$

Se analizará el caso frecuente, para el cual,  $\gamma \geq 7\xi\omega_n$ ,  $0 < \beta < 4\xi\omega_n$ , con el cero próximo al polo ubicado en  $-\beta$ . El grado de proximidad del polo real a lazo cerrado, con respecto al cero de la planta, se medirá (en forma porcentual), en términos de la coordenada del cero real ubicado en  $-\alpha$ .

##### IV.a. Respuesta temporal en función de la ubicación del cero.

En primer lugar analizaremos la respuesta temporal del sistema para diferentes ubicaciones del polo real a lazo cerrado con relación al cero de la planta. En la figura 12, se muestra la respuesta del sistema a lazo cerrado, en función de la ubicación del polo localizado en  $s = -\beta$ , como un porcentaje de la posición del cero real de la planta ubicado en  $s = -\alpha$ .

En la figura 12, se muestran las respuestas correspondientes a:

- I. Sistema de segundo orden puro:

$$K/(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2).$$

II. Sistema de tercer orden , con polos complejos dominantes:

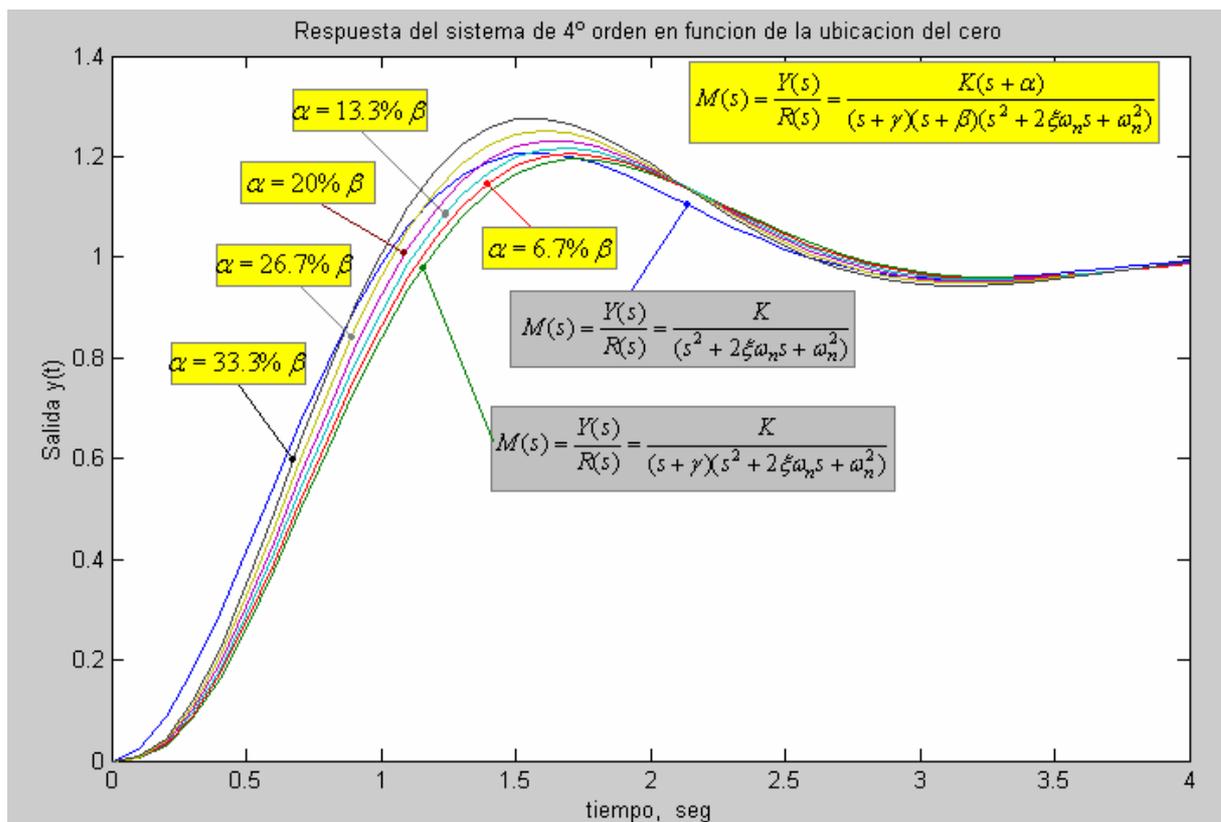
$$K/(s + \gamma)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

III. Sistema de cuarto orden con un cero:

$$K(s + \alpha)/(s + \beta)(s + \gamma)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$$

En este caso, se han considerado diferentes ubicaciones del cero, respecto al polo real más próximo al origen. Estas variaciones se logran ajustando la ganancia del lazo. Los casos que se muestran en el gráfico de la figura 12 son:

- $\alpha = 6.7\% \beta$
- $\alpha = 13.3\% \beta$
- $\alpha = 20\% \beta$
- $\alpha = 26.7\% \beta$
- $\alpha = 33.3\% \beta$



**Fig.12.** Respuesta del sistema de cuarto orden, en función de la ubicación del cero con relación al polo real más próximo al origen.

En la figura 12 se muestra en forma comparativa las diferentes respuestas. Las conclusiones más importantes son:

- a) La respuesta correspondiente al sistema de segundo orden puro, es la más conveniente a lazo cerrado.
- b) La respuesta de un sistema de tercer orden con polos complejos dominantes es *más lenta* que la (a) y tiene casi el mismo sobreerror que (a).
- c) Cuando aparece el polo real a lazo cerrado cerca del cero de la planta, la respuesta del sistema presenta un *sobreerror mayor*, y además se hace *más lento* con respecto al caso (a). Estos parámetros empeoran con relación al caso (a), a medida que el polo real se aleja del cero de la planta.

#### Conclusión:

En los problemas de diseño de un sistema de control, si el mismo tiene una transferencia similar a la indicada por la expresión (9), se tomarán las precauciones para ajustar la sintonía, de tal manera que la ubicación del polo real con respecto al cero de la planta, no esté más allá del 15% ó 20%, como un razonable criterio de diseño. No debe perderse de vista que, a medida que aumenta la ganancia del lazo, la estabilidad relativa disminuye (disminuye  $\xi$ ), representando una situación de compromiso entre la ganancia y la ubicación del polo real de lazo cerrado, respecto al cero de la planta.

#### **IV.b. Consideraciones respecto al Margen de Fase.**

Trataremos de determinar que relación existe entre el Margen de Fase (MG), de un sistema determinado por una función transferencia como la (9), y el coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos, supuestamente dominantes. A su vez trataremos de relacionar el MG con la ubicación del polo real con relación al cero de la planta. No debe perderse de vista que, esta proximidad depende de la ganancia del lazo. A medida que aumenta la ganancia, el polo real se aproxima al cero de la planta.

Realizaremos los cálculos, para una función transferencia de la planta, de cuarto orden tipo uno, y con un cero, como la indicada por la relación 10.

$$G(s) = \frac{K(s + \alpha)}{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)(s + \sigma_3)} \quad (10)$$

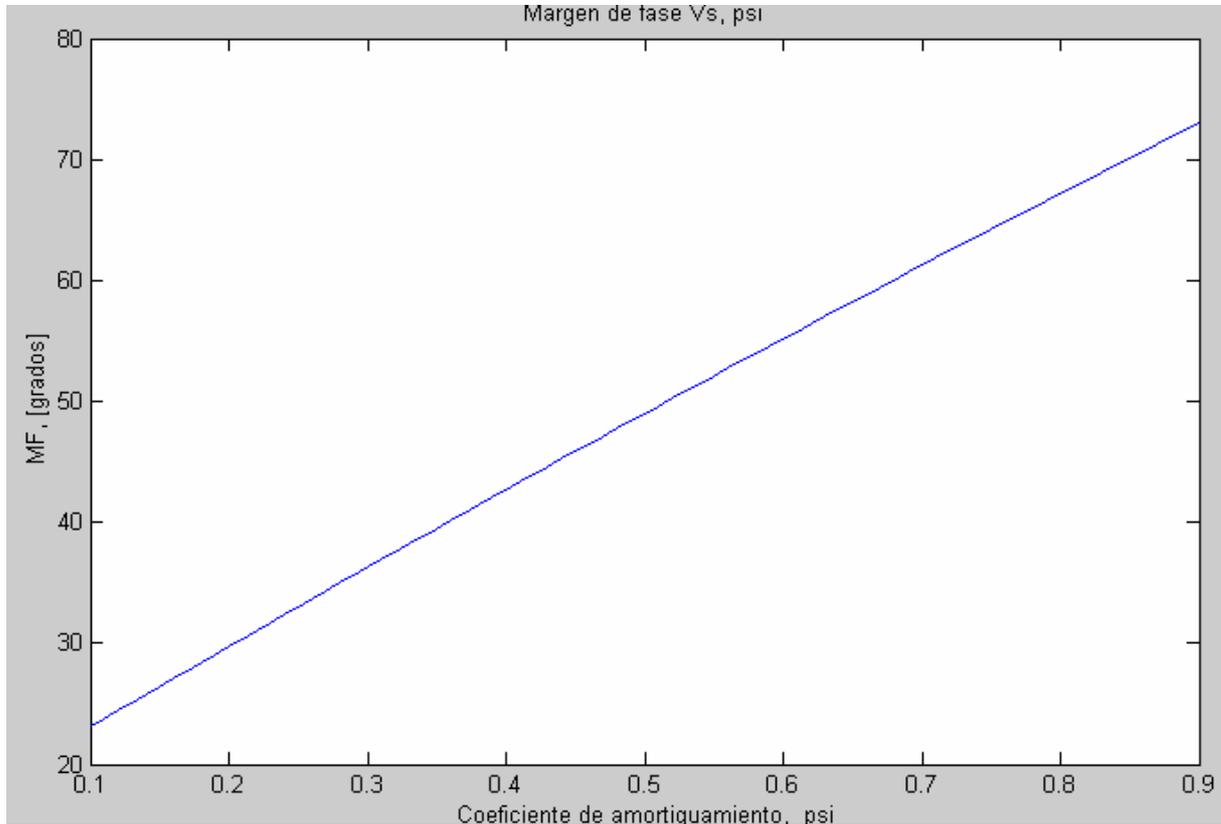
El sistema de control con una función transferencia a lazo abierto como la indicada por la relación (10), para un conjunto de valores de la ganancia, genera una función transferencia a lazo cerrado como la indicada por la (9) y el gráfico de polos y ceros a lazo cerrado mostrado en la figura 11.

Para la función transferencia a lazo abierto como la (10), y variando la ganancia, se obtiene el margen de fase en función del coeficiente de amortiguamiento. Realizando una aproximación polinómica, mediante el método de los cuadrados mínimos, se obtiene.

$$MF = 16.3485 + 68.1828 \xi - 5.7668 \xi^2 \quad (11)$$

$$0.05 \leq \xi \leq 0.94$$

En la figura 13, se muestra un gráfico del MG en función del coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos, de acuerdo a la relación (11).



**Fig. 13.** MG en función de  $\xi$ , para el sistema de cuarto orden con un cero en la planta.

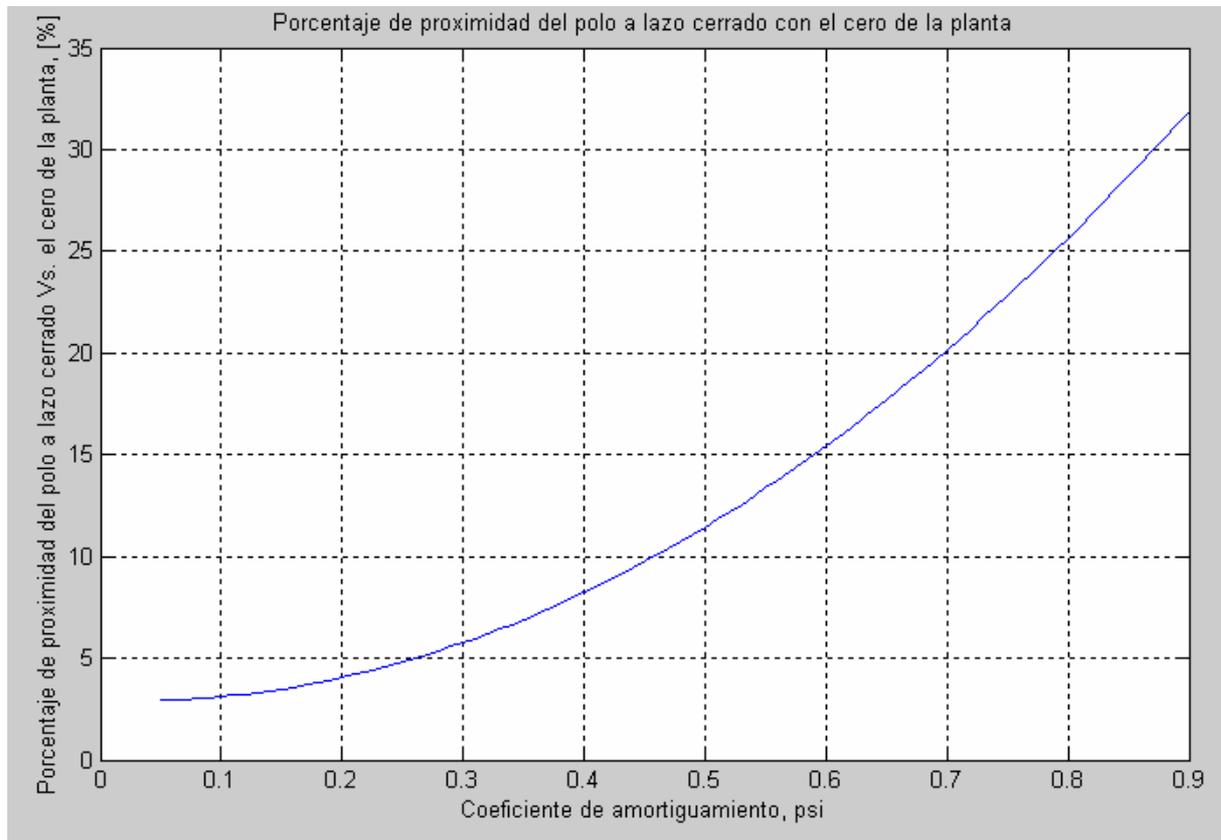
Con los cálculos realizados, el polinomio aproximador para el porcentaje de aproximación en función de  $\xi$  es:

$$\beta = \% \alpha = 2.904 - 1.7667 \xi + 37.77 \xi^2 \quad (12)$$

$$0.05 \leq \xi \leq 0.94$$

La relación entre el porcentaje de aproximación del polo real de  $M(s)$ , al cero de la planta, como una función del coeficiente de amortiguamiento, se puede determinar de los valores obtenidos precedentemente, utilizando un polinomio aproximador, mediante el método de los cuadrados mínimos.

En la figura 14 se muestra la variación del porcentaje de aproximación del polo real a lazo cerrado con el cero de la planta, en función del coeficiente de amortiguamiento, de acuerdo a la relación (12).



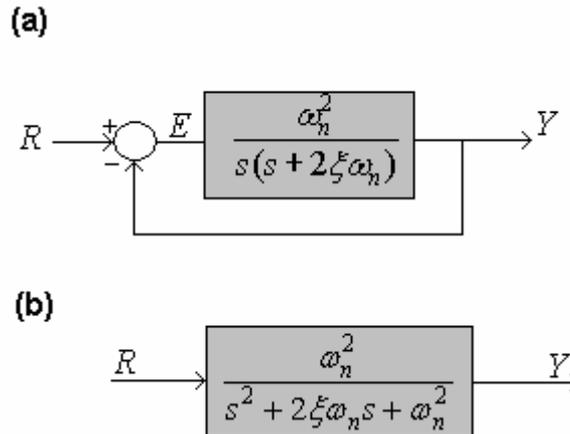
**Fig.14.** Porcentaje de proximidad del polo real a lazo cerrado y el cero de la planta.

### Conclusión:

Cuando se tiene un sistema con cuatro polos a lazo cerrado y un cero proveniente de la planta, como se muestra en la figura 11; para tener una respuesta con un coeficiente de amortiguamiento adecuado, compatible con un margen de fase razonable, el porcentaje de proximidad del polo real a lazo cerrado con respecto al cero de la planta, no debería superar el 10% ó 20%. Siempre es conveniente tener presente estas consideraciones, al ajustar la ganancia, en los problemas de diseño.

## V. Comportamiento en frecuencia de un sistema de segundo orden Subamortiguado.

Considérese la planta indicada en la figura 15 (a) y (b).



**Fig.15.** Diagrama en bloques para un sistema de segundo orden subamortiguado. (a) Planta realimentada; (b) diagrama reducido.

La respuesta en estado estacionario de la salida, frente a una entrada senoidal de amplitud constante y frecuencia variable, tal como:  $r(t) = A \text{sen}(\omega t)$ , con:  $0 \leq \omega < \infty$  está dada por:

$$y_e(t) = A |M(j\omega)| \text{sen}[\omega t + \angle M(j\omega)] \quad (13)$$

De acuerdo con la expresión de la salida en régimen estacionario, relación (13), se puede ver que la salida del sistema es, senoidal y de la misma frecuencia que la entrada, pero con una amplitud que es función de la frecuencia, y con una fase de la salida respecto de la entrada que también depende de la frecuencia de la señal de entrada.

En lo que sigue, se considera que la amplitud  $A = 1$ , o bien se utiliza  $M(j\omega)/A$ . (Transferencia por unidad de entrada), aunque no se indique expresamente en los cálculos y gráficos.

La función transferencia frecuencial del sistema mostrado en la figura 15(b) está dada por:

$$M(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n \omega} \quad (14)$$

Esta función frecuencial, tiene un módulo y una fase, a saber:

$$|M(j\omega)| = M(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\left[ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2 \right]^{1/2}} \quad (15)$$

$$\angle M(j\omega) = \phi(\omega) = -a \tan\left( \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$$

Para los sistemas de segundo orden subamortiguados, el coeficiente de amortiguamiento puede variar entre:  $0 < \xi < 1$ . De esta manera el módulo y fase de la función transferencia a lazo cerrado, expresión (15), dependen del coeficiente de amortiguamiento y de la frecuencia de la señal de entrada.

Para obtener conclusiones útiles para el análisis y diseño de sistemas, es necesario estudiar más detenidamente el modelo del sistema dado por las expresiones (15).

En primer lugar se estudiará si la función  $|M(j\omega)| = M(\omega)$  tiene máximos y mínimos relativos, y de ser así, establecer de qué variables o parámetros depende. Para ello se aplica el método conocido de la derivada de  $|M(j\omega)| = M(\omega)$ , con respecto a  $\omega$ . Procediendo de esta manera, se obtiene:

$$\frac{\partial M(\omega)}{\partial \omega} = \frac{-\omega_n^2 \{ 2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2(2\xi\omega_n)^2 \omega \}}{\left\{ \left[ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2 \right]^{1/2} \left[ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2 \right] \right\}} \quad (16)$$

Igualando a cero el numerador de la (16), se obtiene la ecuación:

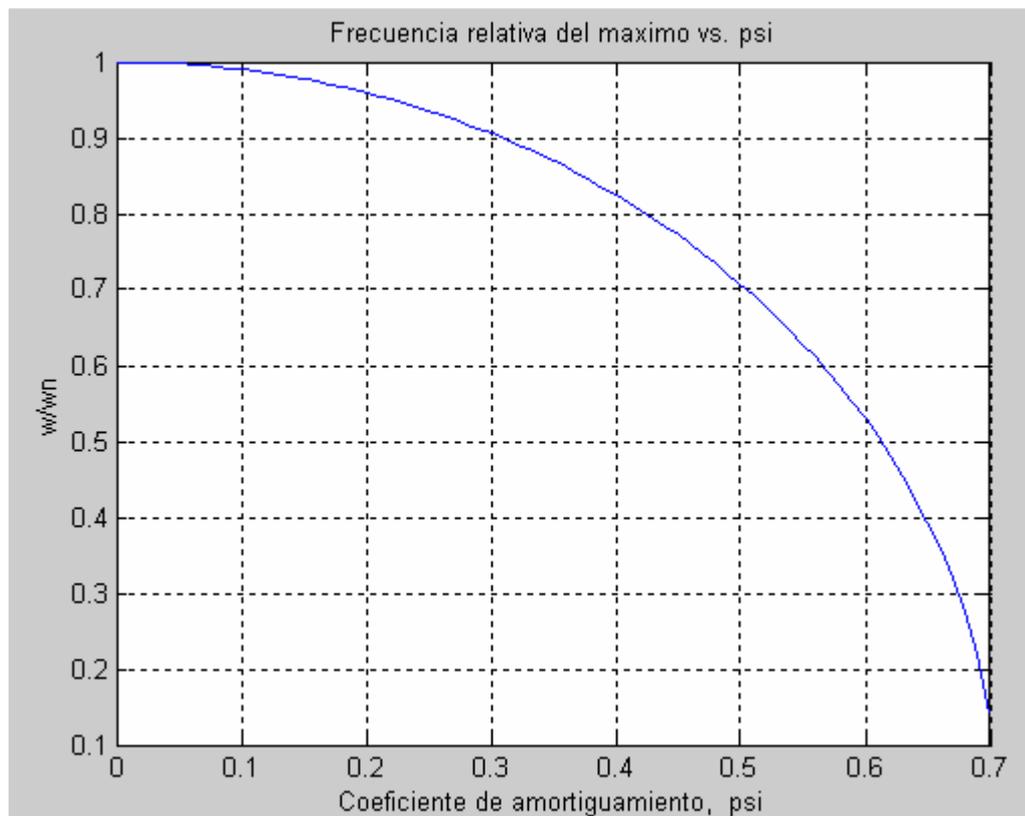
$$\omega \{ 4\omega^2 - 4\omega_n^2 + 8(\xi\omega_n)^2 \} = 0 \quad (17)$$

Resolviendo la ecuación de tercer grado (17), se obtienen las raíces:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ \omega_3 &= -\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Considerando solo las frecuencias positivas, las soluciones son  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Como estas frecuencias no anulan el denominador de la (16), la función  $|M(j\omega)| = M(\omega)$ , presenta máximos relativos a estas frecuencias. De las soluciones (18), se puede ver que la frecuencia  $\omega_2$ , a la cuál se presenta un máximo, depende del coeficiente

de amortiguamiento. En la figura 16, se muestra la variación de la frecuencia  $\omega_2$ , en función de  $\xi$ .



**Fig. 16.** Máximo relativo de  $\omega/\omega_n = f(\xi)$ , fórmula (18).

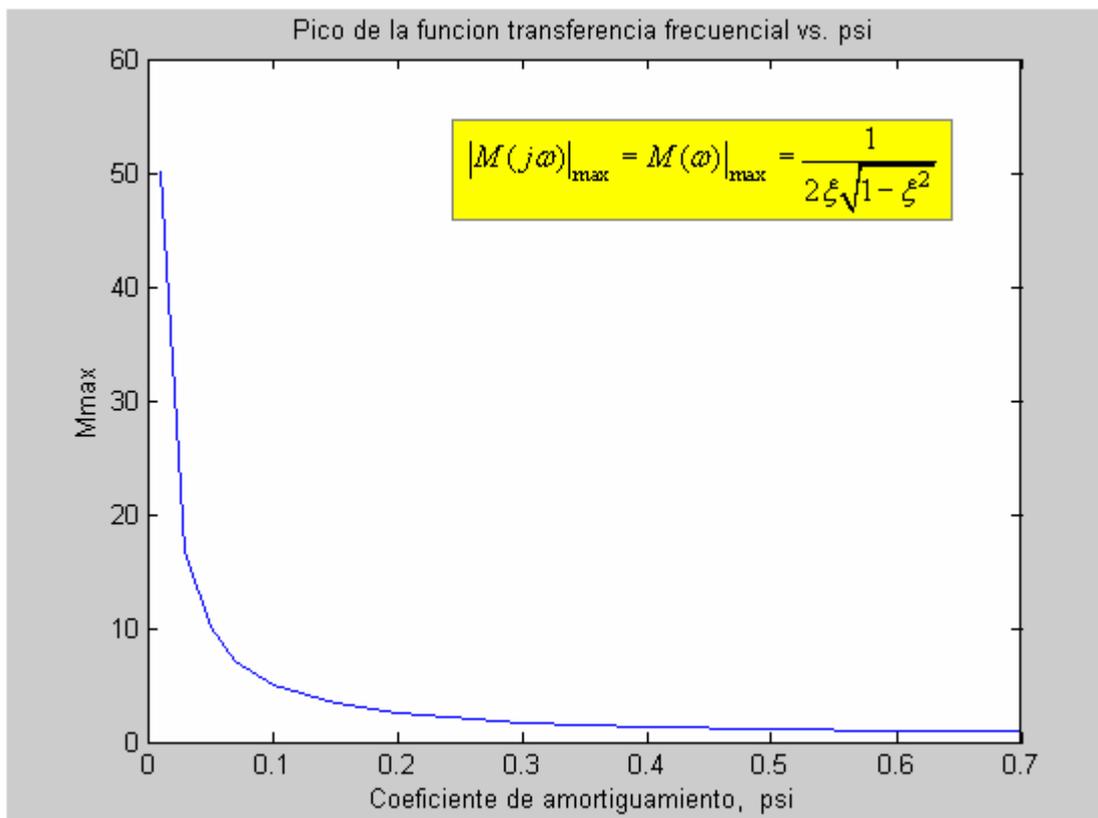
Como se puede ver en la figura 16, a medida que  **aumenta**  el coeficiente de amortiguamiento,  **la frecuencia**  del máximo de  $|M(j\omega)| = M(\omega)$ ,  **disminuye** . Es importante observar que, si el coeficiente de amortiguamiento alcanza o supera el valor  $\xi = \sqrt{2} = 0.707$ , el sistema deja de presentar un máximo frecuencial en la transferencia a lazo cerrado. Esto no debe confundirse con el sobreerror (overshoot) que presenta el sistema en su respuesta temporal, para valores del coeficiente de amortiguamiento comprendidos entre 0.707 y 1.

Una vez conocida la frecuencia a la cuál se produce el máximo, en la respuesta frecuencial, se puede calcular el valor de dicho máximo, reemplazando  $\omega_2$  en la relación (15). De esta manera se obtiene:

$$|M(j\omega)|_{\max} = M(\omega)|_{\max} = \frac{\omega_n^2}{\left\{ \left[ -\omega_n^2(1-2\xi^2) + \omega_n^2 \right]^2 + 4\xi^2\omega_n^2 \left[ \omega_n^2(1-2\xi^2) \right] \right\}^{1/2}} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

En la figura 17, se muestra la variación del máximo de la función transferencia frecuencial, en función del coeficiente de amortiguamiento. En dicha figura se ha considerado que el coeficiente de amortiguamiento, puede aumentar hasta 0.707, porque a partir de ese valor ya no se tiene un máximo.



**Fig.17.** Máximo de la función transferencia frecuencial vs.  $\xi$  ( $M(\omega)|_{\max} = f(\xi)$ ).

En la figura 17 se puede ver que, si el coeficiente de amortiguamiento es  $\xi = \sqrt{2} = 0.707$ , la amplitud de la salida es igual a la amplitud de la señal de entrada, es decir  $M(\omega)|_{\max} = A$ , o bien  $M(\omega)|_{\max} / A = 1$ . Por debajo de ese valor del coeficiente de amortiguamiento, la amplitud máxima de la salida, supera a la amplitud de la entrada ( $A$ ) de acuerdo a la fórmula (13).

Con referencia a la fase de  $M(j\omega)$ , es decir  $\phi(\omega)$ , la misma depende de la frecuencia y del coeficiente de amortiguamiento, como lo indica la expresión (15). A continuación se transcribe la referida expresión matemática para la fase:

$$\angle M(j\omega) = \phi(\omega) = -a \tan\left(\frac{2\xi\omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (20)$$

La relación funcional indicada por la (20) presenta puntos singulares, como ser:

- Cuando la frecuencia de la señal de entrada coincide con la frecuencia natural del sistema, y el coeficiente de amortiguamiento es distinto de cero ( $\xi \neq 0$ ), la fase adquiere el valor:

$$\phi(\omega)|_{\omega=\omega_n} = -a \tan\left(\frac{2\xi\omega_n \omega}{0}\right) = -90^\circ, \quad \forall: 0 < \xi < 1 \quad (21)$$

La relación (21), indica que la fase de la salida siempre pasa por  $-90^\circ$ , al variar la frecuencia de entrada entre cero e infinito ( $0 \leq \omega < \infty$ ), y la frecuencia a la cuál esto sucede, es la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ).

- Cuando el coeficiente de amortiguamiento tiende a cero, la fase de la señal de salida con relación a la entrada, por debajo de la frecuencia natural es  $0^\circ$ , y por encima de la frecuencia natural, la fase de la salida con relación a la entrada es  $-180^\circ$ . En el límite ( $\xi \rightarrow 0$ ), la curva de fase presenta una discontinuidad en la frecuencia  $\omega = \omega_n$ .

Es de mucha utilidad práctica, para el diseño de sistemas, la curva del módulo de la función transferencia ( $|M(j\omega)| = M(\omega)$ ) por unidad de entrada ( $A$ ),  $[M(\omega)/A]$ , en relación a la frecuencia de la señal de entrada al sistema, y del coeficiente de amortiguamiento del sistema.

Para trabajar eficientemente con el gráfico de módulo y fase, conviene normalizar la frecuencia de la señal de entrada con respecto a  $\omega_n$ , e introducir una nueva variable  $x = \omega/\omega_n$ . Sobre la base de esta nueva variable, se obtiene:

$$|M(j\omega/\omega_n)| = M(\omega/\omega_n) = \frac{1}{\left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 2\xi \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad (22)$$

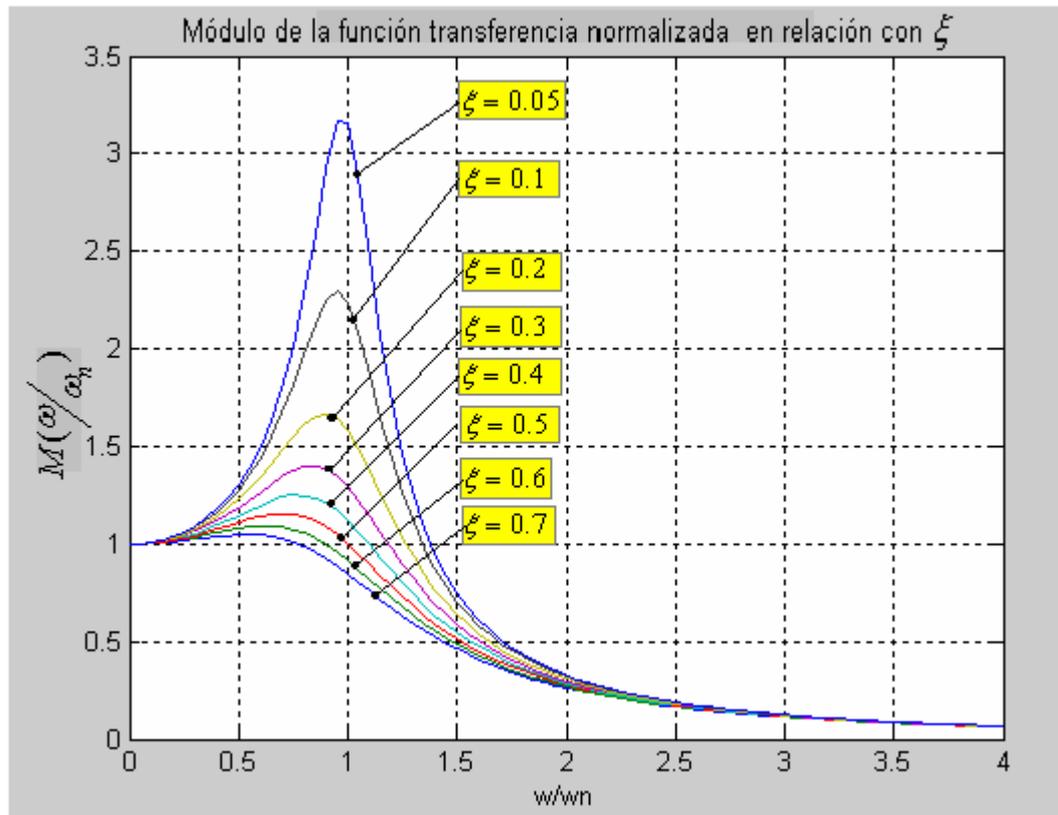
Reemplazando en la (21) por  $x = \omega/\omega_n$ , se obtiene:

$$|M(jx)| = M(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2\xi x^2}}, \quad \forall: 0 \leq x < \infty \quad (23)$$

Con relación a la fase, se obtiene:

$$\phi(x) = -a \tan\left(\frac{2\xi x}{1-x^2}\right) \quad (24)$$

En la figura 18, se muestra la variación del módulo de la transferencia frecuencial, como una función de la frecuencia normalizada, y para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento.

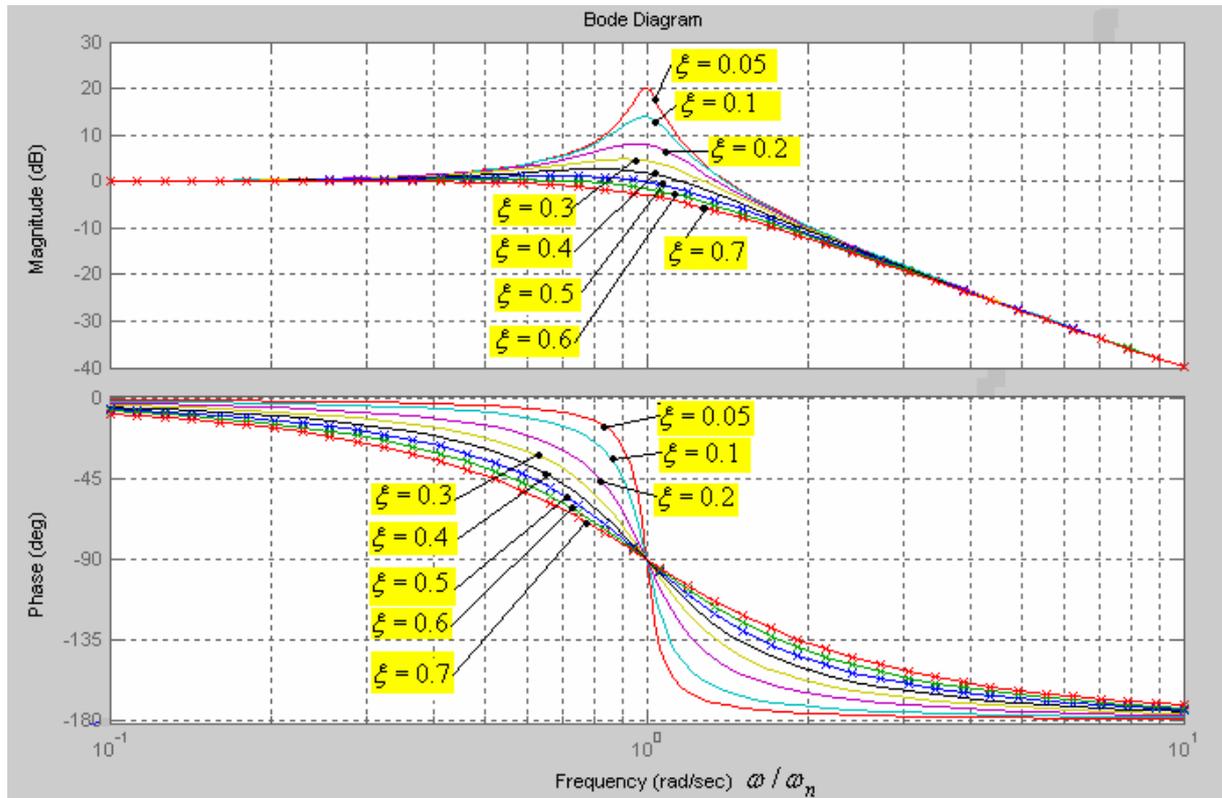


**Fig. 18.**  $M(\omega/\omega_n)$  para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

En la figura 18, se puede ver que los picos de  $M(\omega/\omega_n)$  [normalizada], disminuyen al aumentar el coeficiente de amortiguamiento, y al mismo tiempo la *frecuencia normalizada* a la que se producen los picos, disminuye al aumentar el coeficiente de amortiguamiento.

Una forma muy útil para analizar y diseñar sistemas de control, consiste en presentar la curva de módulo y fase de la transferencia frecuencial del sistema, en un gráfico semilogarítmico, para el módulo (escala de ordenadas lineal en dB, y escala de abscisas logarítmica en décadas), y para la fase (escala de ordenadas en grados sexagesimales, abscisas ídem al módulo) tal gráfico se conoce como gráfico de Bode.

En la figura 19 se muestra el gráfico de Bode para el sistema bajo consideración, en función de  $\omega/\omega_n$  (similar a considerar  $\omega_n = 1$ ).



**Fig. 19.** Diagrama de Bode para el sistema de 2º orden subamortiguado.

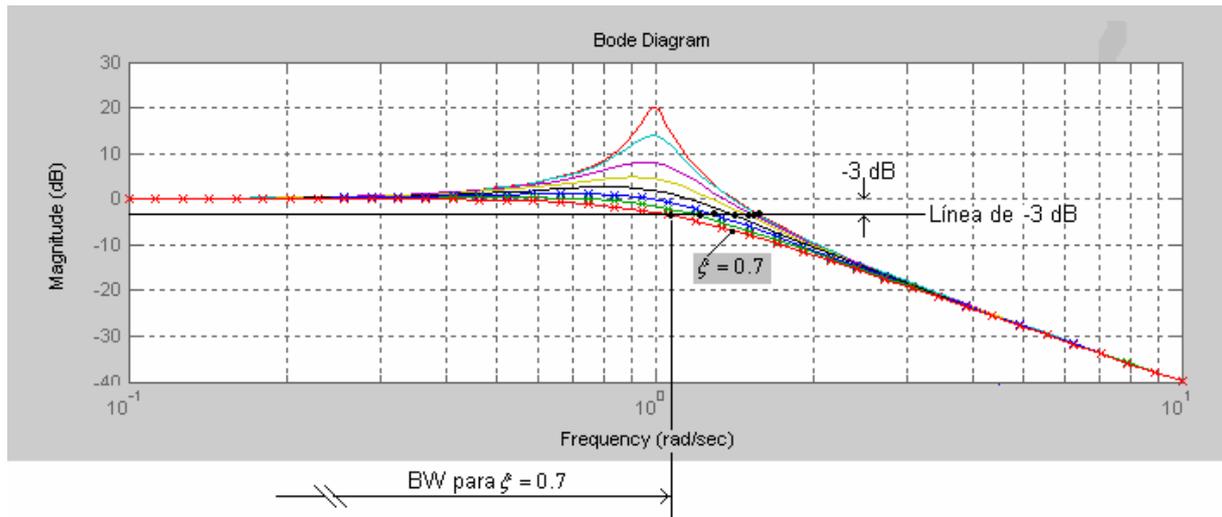
En la figura 19 se puede ver claramente el comportamiento en frecuencia del sistema de 2º orden subamortiguado, tanto en la curva de módulo (dB) como en la curva de fase.

En el gráfico de la figura 19, se puede ver claramente, que el apartamiento de la curva de módulo respecto de las asíntotas de baja frecuencia (0 dB/dec) y alta frecuencia (-20 dB/dec) es mayor a medida que disminuye el coeficiente de amortiguamiento.

En el gráfico de la figura 19, se puede ver que el apartamiento de la curva de fase respecto a la asíntota (-90º/dec) que pasa por -90º, es tanto mayor a medida que disminuye el coeficiente de amortiguamiento.

Las consideraciones precedentes permiten afirmar que, para un sistema subamortiguado con bajo coeficiente de amortiguamiento ( $\xi < 0.5$ ), la aproximación asintótica, presenta notables diferencias con la curva real del sistema, debido a lo cuál, se pueden cometer importantes errores si no se tiene en cuenta el coeficiente de amortiguamiento.

En la figura 20 se muestra, como es afectado el ancho de banda del sistema, por el coeficiente de amortiguamiento.



**Fig.20.** Ancho de banda en relación con el coeficiente de amortiguamiento.

Como se puede ver claramente en la figura 20, el ancho de banda del sistema (medido con respecto a la línea de -3 dB en relación con la de 0 dB) aumenta al disminuir el coeficiente de amortiguamiento.

### **Conclusiones.**

**1) Error.** Cuando se emplean aproximaciones asintóticas para sistemas de 2º orden subamortiguados, el error que se comete aumenta notablemente al disminuir el coeficiente de amortiguamiento. Con coeficientes de amortiguamiento comprendidos dentro de la banda  $0.5 < \xi < 1$  el error que se comete, al utilizar la aproximación asintótica, está dentro de los márgenes tolerables por la ingeniería.

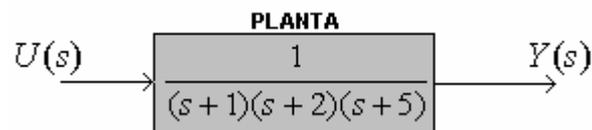
**2) Ancho de banda.** En la figura 20, se ve claramente como varía el ancho de banda (BW) del sistema, en relación con el coeficiente de amortiguamiento para sistemas de 2º orden subamortiguados. A medida que el coeficiente de amortiguamiento aumenta el BW disminuye, es decir la respuesta del sistema es más lenta al aumentar  $\xi$ .

**3) Estabilidad relativa.** Al disminuir el coeficiente de amortiguamiento la estabilidad relativa del sistema disminuye. Esto significa que la salida del sistema aumenta en relación con la entrada (amplitud constante), al aproximarse a la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ) y a medida que disminuye el coeficiente de amortiguamiento ( $\xi$ ).

Por las razones enumeradas precedentemente, y otras que no se han tratado en este fascículo, el proyectista de sistemas de control, trata de utilizar un valor razonable del coeficiente de amortiguamiento, que compatibilice la mayor parte de las exigencias del diseño, analizadas en estas páginas.(y otras propias del sistema físico que no se han considerado).

## VI. Efectos por el agregado de ceros. Caso del controlador PID ideal.

Muchas veces en el diseño de sistemas de control, se plantea la posibilidad de agregar un controlador que introduzca ceros y polos en la cadena directa, a los efectos de cumplir con las especificaciones requeridas para el sistema de control. Consideremos la planta mostrada en la figura 21, de la cual se conoce su modelo (en este caso la función transferencia) de 3º orden y tipo cero.



**Fig.21.** Planta de 3º orden tipo cero.

Considérese que, se desea diseñar un sistema de control para dicha planta, tal que cumpla las siguientes especificaciones:

$M_o = 5\%$	: Sobreerror(overshoot)
$t_s \leq 1.6 \text{ seg}$	: Tiempo de establecimiento
$e(\infty) = 0$	: Seguimiento perfecto al escalón de referencia

Una posibilidad para resolver el problema planteado, es utilizar un controlador PID, de manera tal que los ceros que introduce el controlador, cancelen los polos reales de la planta, más próximos al origen, es decir, los que están en  $s = -1$  y  $s = -2$ . Actuando de la manera indicada, los ceros del controlador PID, cancelan los polos reales de la planta, y finalmente, queda una cadena directa con dos polos, uno en el origen y otro en  $s = -5$ . De esta manera se tendrán dos polos complejos que "supuestamente" definen la respuesta transitoria del sistema de control, es decir fijan ( $M_o$  y  $t_s$ ). La acción de control **PID ideal**, es de la forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d e(t)}{dt} + K_i \int_0^T e(t) dt \quad (25)$$

La expresión (25), se puede transformar por Laplace, y obtener la función transferencia del controlador **PID ideal**.

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} &= \left( K_p + K_d s + K_i \frac{1}{s} \right) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \\ &= \frac{K_d \left( s^2 + \frac{K_p}{K_d} s + \frac{K_i}{K_d} \right)}{s} \end{aligned} \quad (26)$$

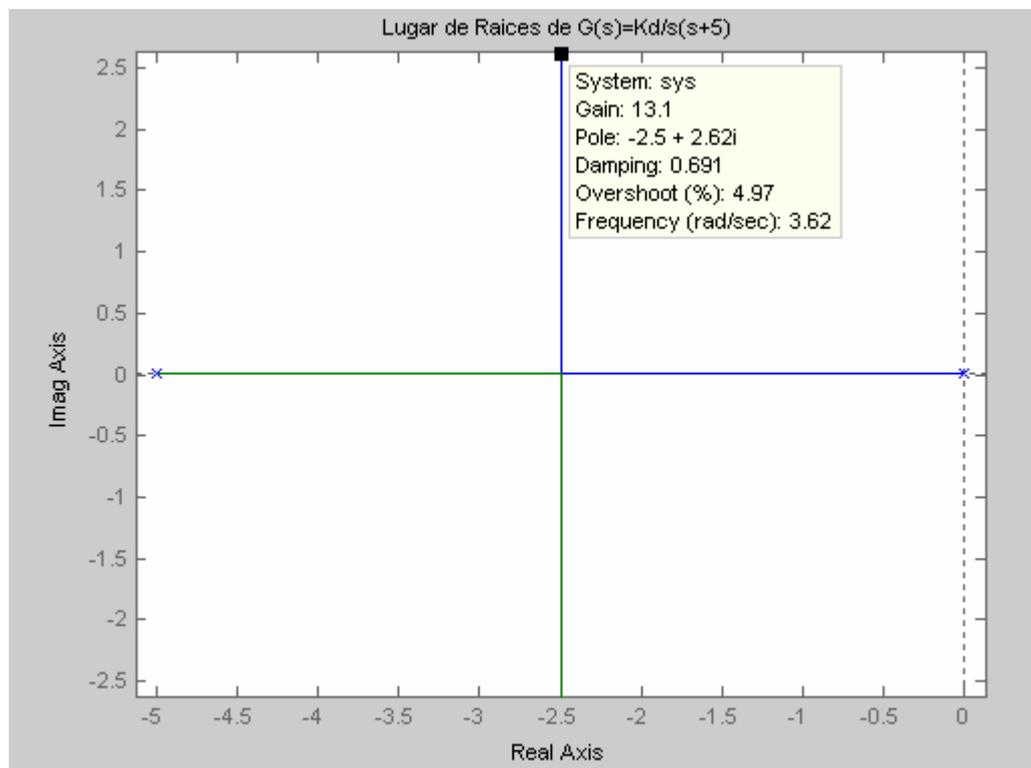
Para el diseño del controlador PID ideal, se utilizará la expresión (26). Anteriormente se mencionó que una posibilidad “razonable” de diseño es cancelar los polos reales de la planta, con los ceros del controlador, es decir:

$$(s+2)(s+1) = s^2 + 3s + 2 = s^2 + \frac{K_p}{K_d}s + \frac{K_i}{K_d} \quad (27)$$

De la igualdad, expresada por la relación (27), se obtiene:

$$\frac{K_p}{K_d} = 3$$
$$\frac{K_i}{K_d} = 2 \quad (28)$$

Al considerar la posibilidad de cancelación dada por la expresión (27), y su consecuencia, la expresión (28), el sistema a lazo abierto queda reducido a un polo en el origen, y un polo real en  $s = -5$ . De esta manera al variar la ganancia, se pueden lograr dos polos complejos a lazo cerrado que “cumplan” con el comportamiento transitorio deseado para el sistema de control. En la figura 22 se muestra lo dicho, con el lugar de raíces en función de  $K_d$ , como se desprende de la expresión (26).



**Fig.22.** Lugar de raíces del sistema de control.

En la figura 22 se muestra el punto de sintonía del lazo, que cumple las especificaciones de respuesta transitoria. De la figura 22, se obtiene (condición de módulo) el valor de la ganancia derivativa:

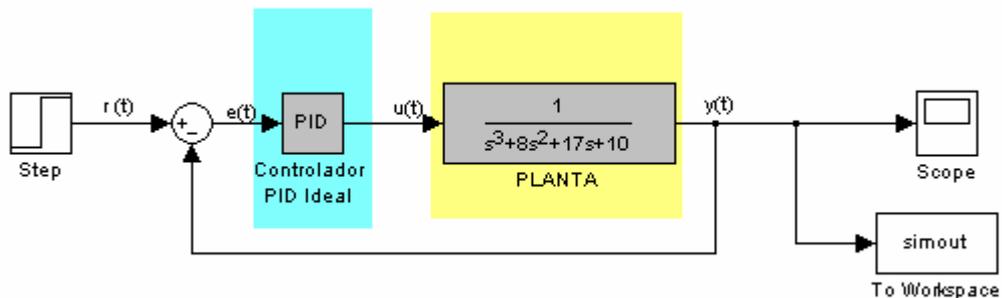
$$K_d = 13.1 \quad (29)$$

Sobre la base de las relaciones (28), se obtienen las ganancias proporcional e integral.

$$\begin{aligned} K_p &= 3K_d = 39.3 \\ K_i &= 2K_d = 26.2 \end{aligned} \quad (30)$$

Verificación de resultados mediante Simulación Dinámica (empleando Simulink).

A pesar que, “parecería más que obvia”, la obtención de un resultado que cumpla satisfactoriamente las especificaciones, es necesario realizar la verificación mencionada precedentemente (y así debería procederse en todo problema de análisis y diseño de un sistema de control). En la figura 23 se muestra el diagrama en bloques empleado para realizar la simulación dinámica con SIMULINK.

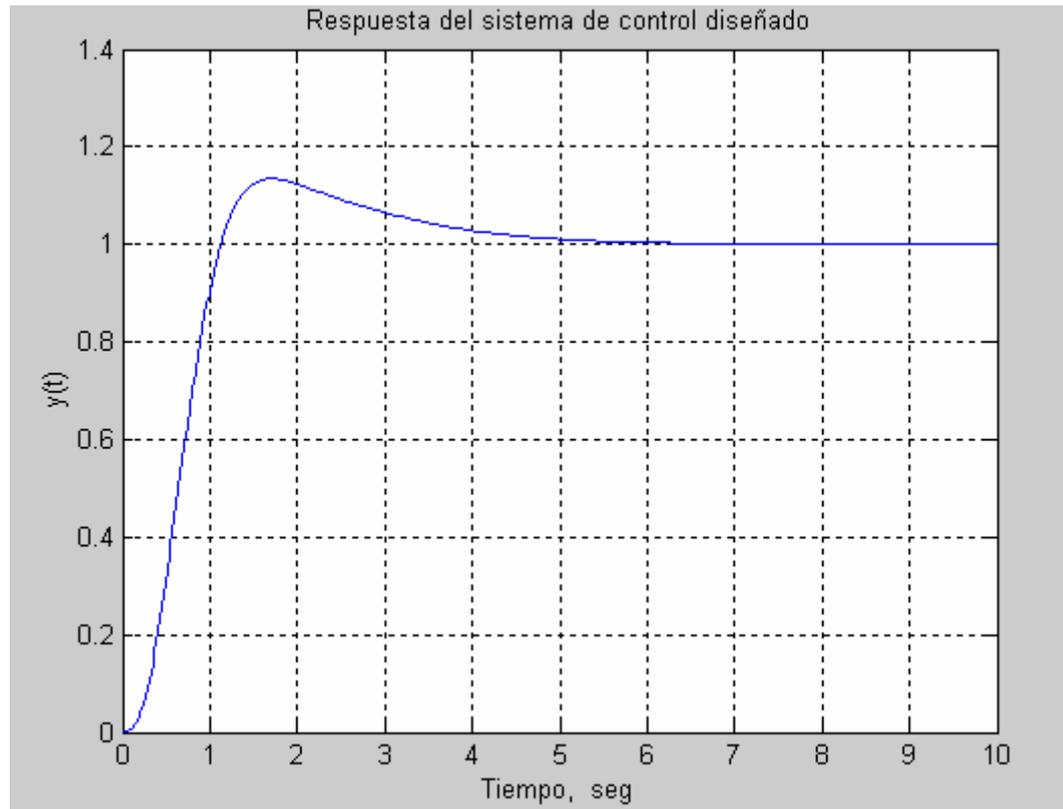


**Fig.23.** Diagrama en bloques empleado en la simulación.

En la figura 24 se muestra la repuesta de, la salida del sistema de control,  $y(t)$ , frente a la aplicación de un cambio escalón, en la referencia. Observando detenidamente la respuesta obtenida, se puede ver que la misma no cumple las especificaciones de respuesta transitoria. Del gráfico mostrado en la figura 24, se obtienen los valores que caracterizan la respuesta transitoria del sistema, a saber:

$$\begin{aligned} M_o &= 13.5\% \\ t_s &= 4.3 \text{ seg} \end{aligned} \quad (31)$$

Los valores obtenidos (31), mediante el diseño, para el sistema de control, con el *controlador PID ideal*, están muy lejos de las especificaciones. Esto es tan así que, el tiempo de establecimiento obtenido es 2.7 (270%) veces superior al deseado y el sobreerror es también 2.7 veces (270%) superior al solicitado.



**Fig.24.** Respuesta del sistema de control diseñado.

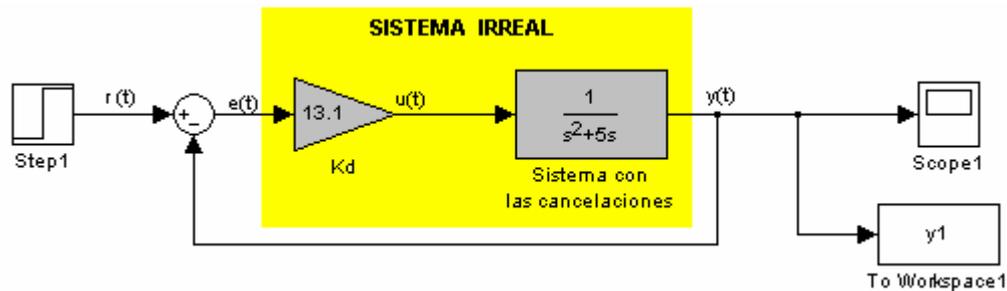
### ¿Dónde está el problema?

Se analizará el problema, para establecer donde se encuentra la causa del incumplimiento de las especificaciones. En este momento es conveniente recordar que, en general, se busca la respuesta por el camino menos adecuado. Así, frecuentemente se trata de buscar errores matemáticos, errores de simulación, errores en los valores, y aspectos por el estilo. Casi siempre, se deja de lado el aspecto físico del problema de control, a pesar que el controlador y la planta son elementos físicos reales, caracterizados en este caso por sus modelos.

Con el fin de aproximarnos en la búsqueda de las causas de no-cumplimiento de especificaciones, recorreremos un camino que estimamos puede ser útil para buscar respuestas a otros interrogantes similares.

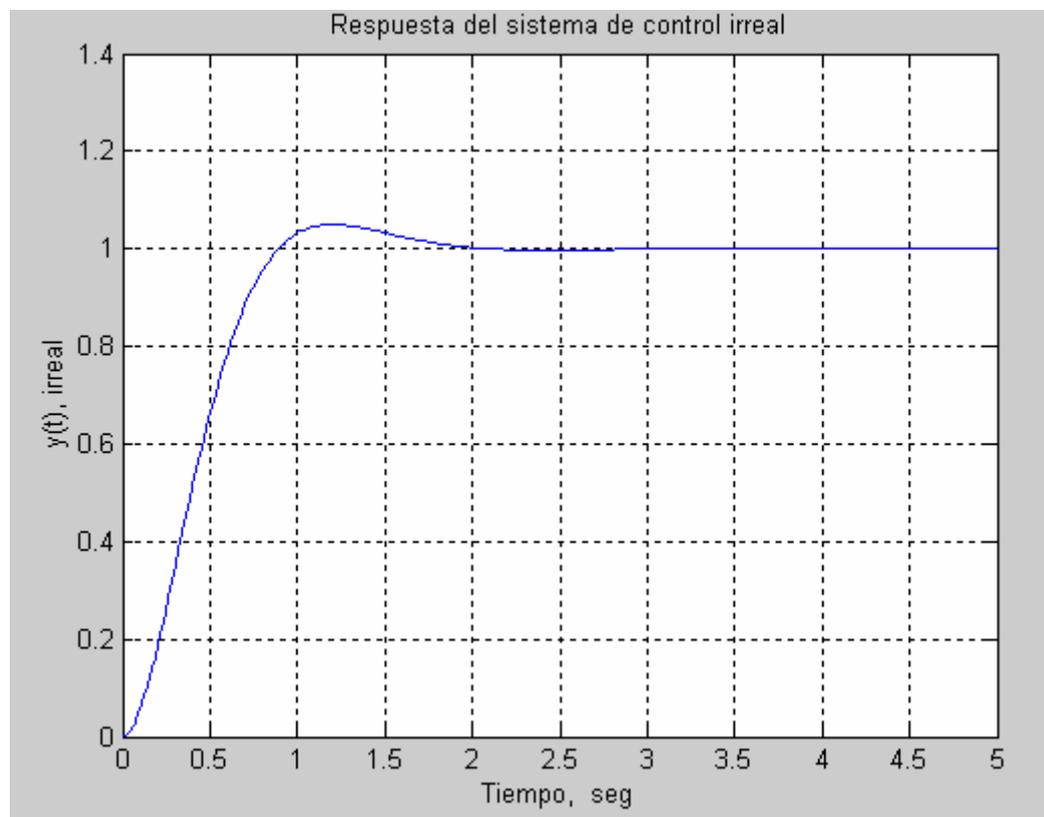
#### a) Procedimiento de diseño.

El procedimiento de diseño es correcto, a tal punto que si se efectúa una simulación con la idea que el controlador no está, y solo consideramos lo que "ha quedado" después de las cancelaciones de los ceros del controlador con los ceros de la planta (*Sistema Irreal*), según indica el diagrama en bloques de la figura 25, y se realiza la simulación dinámica correspondiente, se podrá comprobar que este "sistema irreal" cumple especificaciones !!!!



**Fig.25.** Sistema Irreal.

Si consideramos la respuesta temporal del “Sistema Irreal”, veremos que la misma cumple con las especificaciones, según se mencionó precedentemente. En la figura 26 se muestra el gráfico respectivo.



**Fig.26.** Respuesta del sistema de control irreal.

El gráfico de la figura 26, muestra claramente que el “sistema irreal”, cumple especificaciones, pero este no es el sistema que hemos diseñado. De manera que la respuesta, a nuestra pregunta, se deberá buscar por el lado del sistema diseñado. La sospecha más fuerte, debe centrarse en el **controlador PID Ideal** y su ley de control, definida por la expresión (25). Esta ley de control tiene una parte derivativa pura que representa un serio problema. Esto es tan así que, al aplicar un cambio escalón en la referencia, la parte derivativa pura del *PID Ideal*, genera a su salida una señal muy fuerte (delta de Dirac) que empuja a la salida de la planta, a tomar

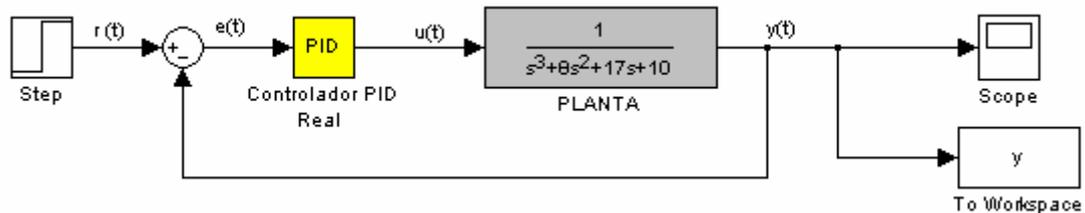
valores importantes (como tendencia), que no los alcanza cabalmente, debido al efecto de la realimentación negativa, que contribuye a frenar la respuesta. Pero no puede impedir que se alcance la respuesta mostrada por la figura 24.

Esto significa que debe modificarse el controlador *PID Ideal*, por otro *Real* (así lo entendieron los teóricos y los fabricantes de controladores, que han dado origen a muchas versiones de *PID Real* que cumplen los requisitos de las aplicaciones).

La versión más simple, es agregar una constante de tiempo en la acción derivativa, modificando la ecuación (25), por otra como la (32).

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + \frac{K_d s}{1 + 1/Ns}, \quad \text{Controlador PID Real} \quad (32)$$

Este controlador PID Real, con acción derivativa aproximada, permite corregir las deficiencias del PID Ideal. En la figura 27 se muestra el diagrama en bloques, que se ha utilizado para resolver el problema de control.



**Fig. 27.** Planta con el Controlador PID real.

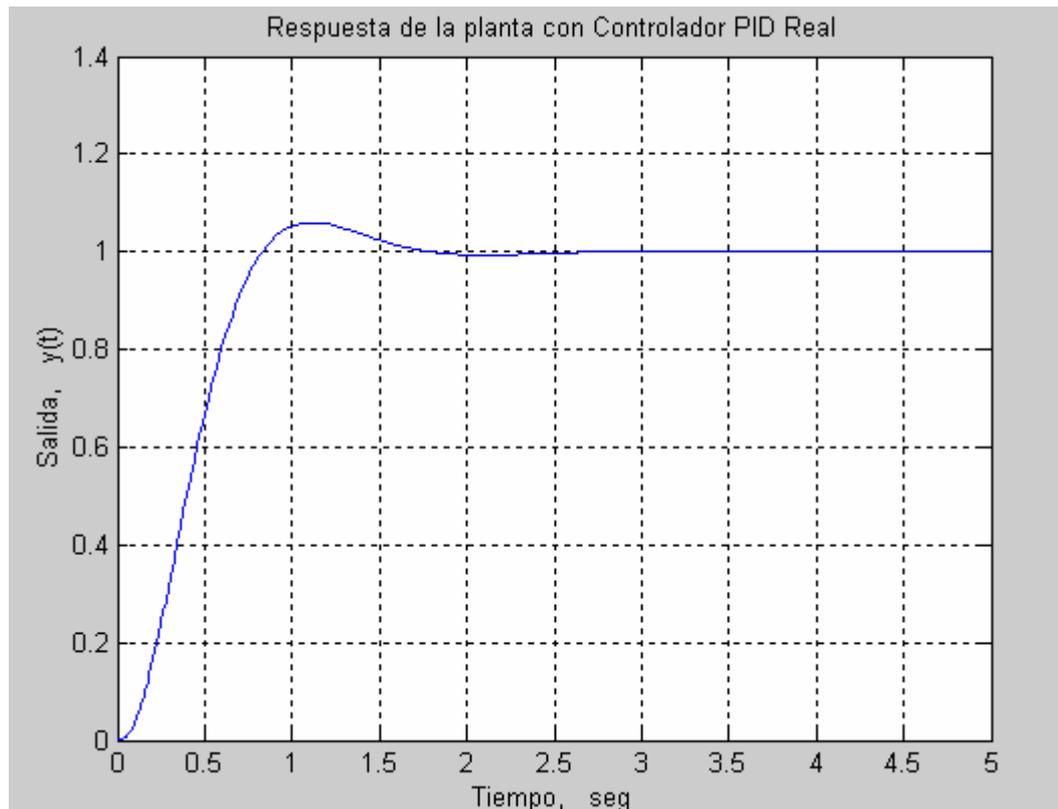
El parámetro N, debe ajustarse mediante un simple procedimiento de prueba y error. Con N ajustado, se obtuvo la respuesta mostrada en la figura 28.

De la figura 28 se pueden obtener el sobreerror (overshoot) y el tiempo de establecimiento que se han logrado con el ajuste del controlador PID real. Estos valores son:

$$M_0 = 6\% \quad (1.06) \quad (33)$$

$$t_s = 1.53 \text{ seg}$$

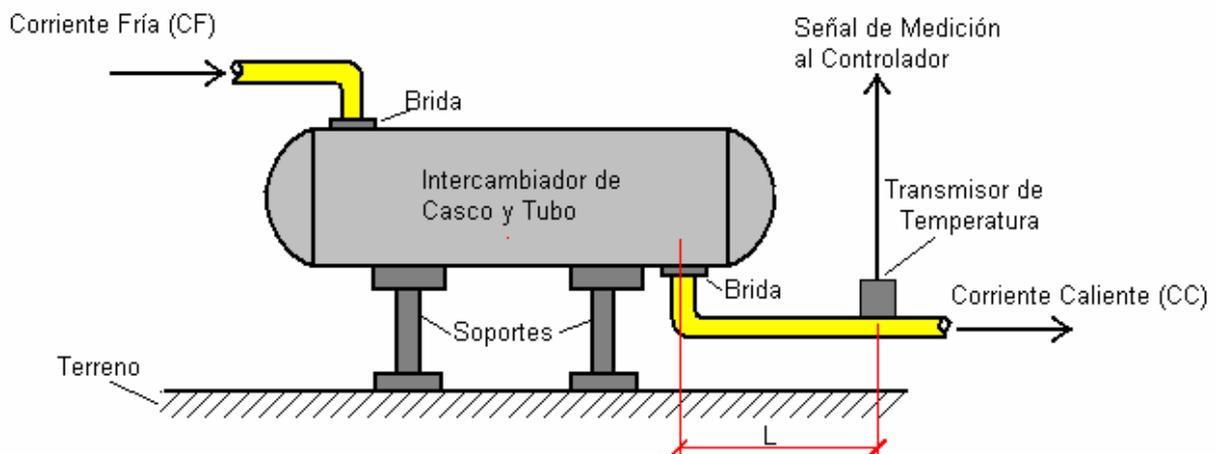
Los valores obtenidos (33), son aproximadamente iguales a los solicitados en las especificaciones. Podrían haber sido iguales o mejores a las exigencias, si se dedicaba un poco más de tiempo en la búsqueda del parámetro N para el controlador. A los fines aquí perseguidos, se considera que los resultados alcanzados son suficientes.



**Fig.28.** Respuesta del sistema de control con controlador PID Real.

### VII. Sistemas con retardo de transporte o tiempo muerto.

En la realidad física muchos sistemas presentan retardo de transporte o tiempo muerto, ya sea en el proceso(o planta) o en la medición. Por ejemplo: el líquido de salida de un intercambiador, cuya temperatura es necesario regular, presenta generalmente un retardo de transporte, como indica la figura 29.



**Fig. 29.** Intercambiador de Casco y Tubo.

En la figura 29, se puede ver que, el transmisor de temperatura de la corriente caliente, está montado (no se permite perforar el casco para montarlo en el intercambiador) a una distancia  $L$  (m), respecto a la salida del intercambiador, que es donde se entrega la energía térmica para elevar la temperatura de la corriente caliente. Debido a ello transcurrirá un tiempo  $T = L/v$  [seg], antes que el transmisor detecte cualquier cambio en la temperatura de intercambio, y la válvula de control inicie la corrección que hiciese falta. Este “retardo en la medición”, en la “acción de control”, en la “operación funcional”, o en situaciones similares, se denomina: retardo de transporte o tiempo muerto.

También hay muchas mediciones que se realizan extrayendo muestras de la corriente de fluido y se analiza (en los conocidos analizadores) para después de un cierto tiempo(a veces varios minutos) entregar el resultado de la medición al controlador y este corrija la corriente principal si hiciera falta; aquí también hay tiempo muerto.

La mayoría de los sistemas de control de procesos, presentan este retardo de transporte o tiempo muerto.

Un retardo de transporte ideal, se puede modelar mediante el diagrama en bloques mostrado en la figura 30.



**Fig. 30.** Diagrama en bloques del retardo de transporte ideal.

Dicho retardo de transporte ideal, tiene una función transferencia dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ts} \quad (34)$$

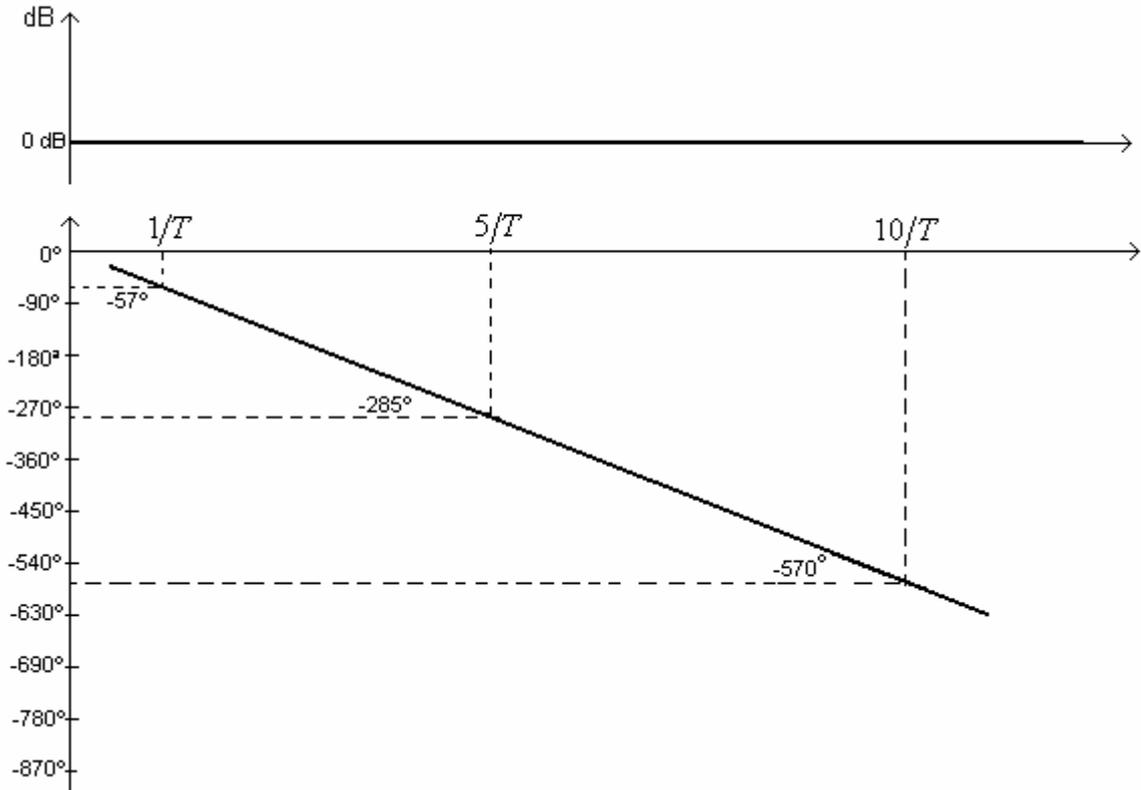
El comportamiento en frecuencia del retardo de transporte se determina a partir de:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-j\omega T} \quad (35)$$

El comportamiento en frecuencia de un retardo, se puede visualizar en un diagrama de Bode, para los cuál se requiere el módulo y la fase de  $G(j\omega)$ , es decir:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |e^{-j\omega T}| = 1 \rightarrow 0dB \\ \angle G(j\omega) &= \angle e^{-j\omega T} = -\omega T \times \frac{180^\circ}{\pi} \rightarrow \text{en grados} \end{aligned} \quad (36)$$

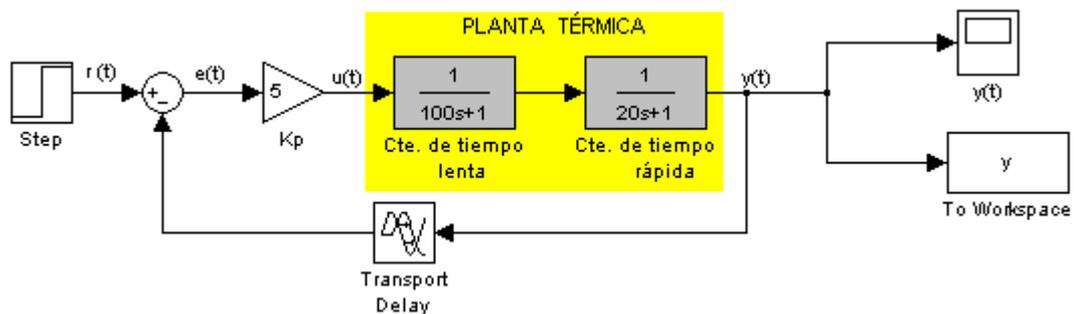
En la figura 31 se muestra el diagrama de Bode correspondiente al retardo.



**Fig. 31.** Diagrama de Bode para un retardo.

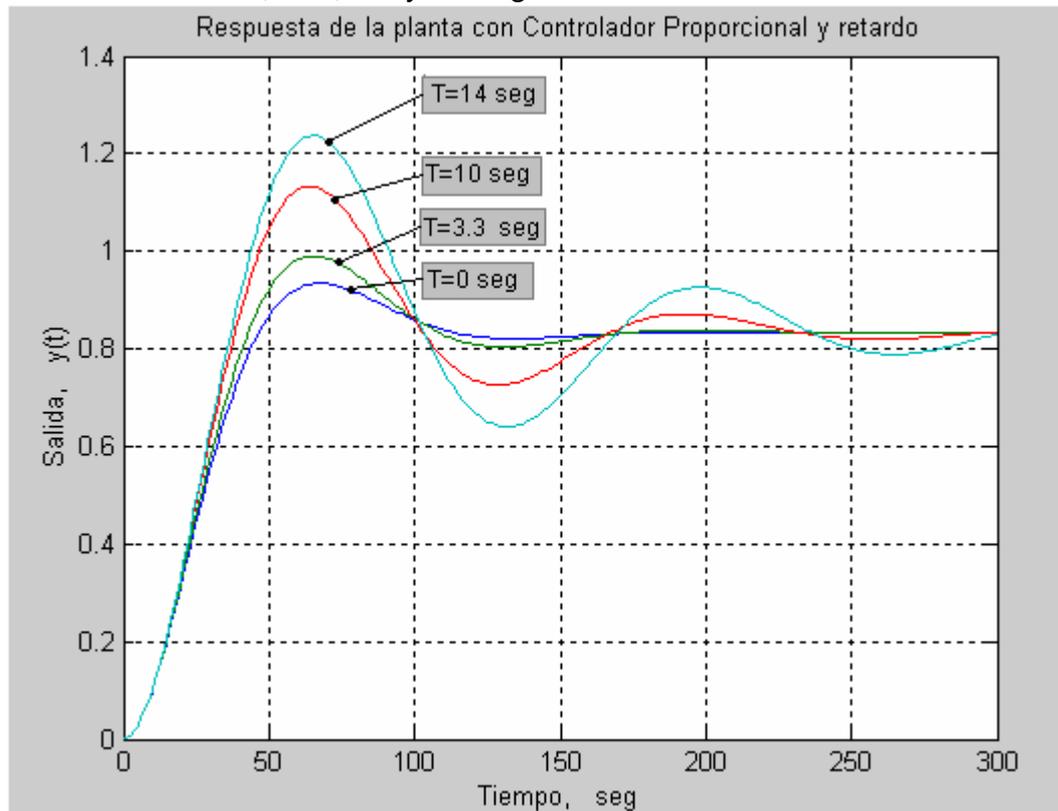
Como se observa en la figura 31, el retardo introduce un retraso de fase que es función directa de la frecuencia; de tal manera que un sistema estable sin el retardo se puede convertir en inestable, o en el mejor de los casos presentar sobreerrores inaceptables o mantener oscilaciones sostenidas.

Para considerar este problema, tomaremos como ejemplo, una planta de segundo orden tipo cero (con una constante de tiempo lenta y otra rápida), que corresponde a un proceso térmico, y la analizaremos con acción proporcional, y varios valores del retardo, que a su vez, corresponden a diferentes valores de la longitud  $L$ , y considerando una dada velocidad del fluido en la cañería (Velocidad de diseño). En la figura 32 se muestra el diagrama en bloques, empleado para realizar la simulación dinámica.

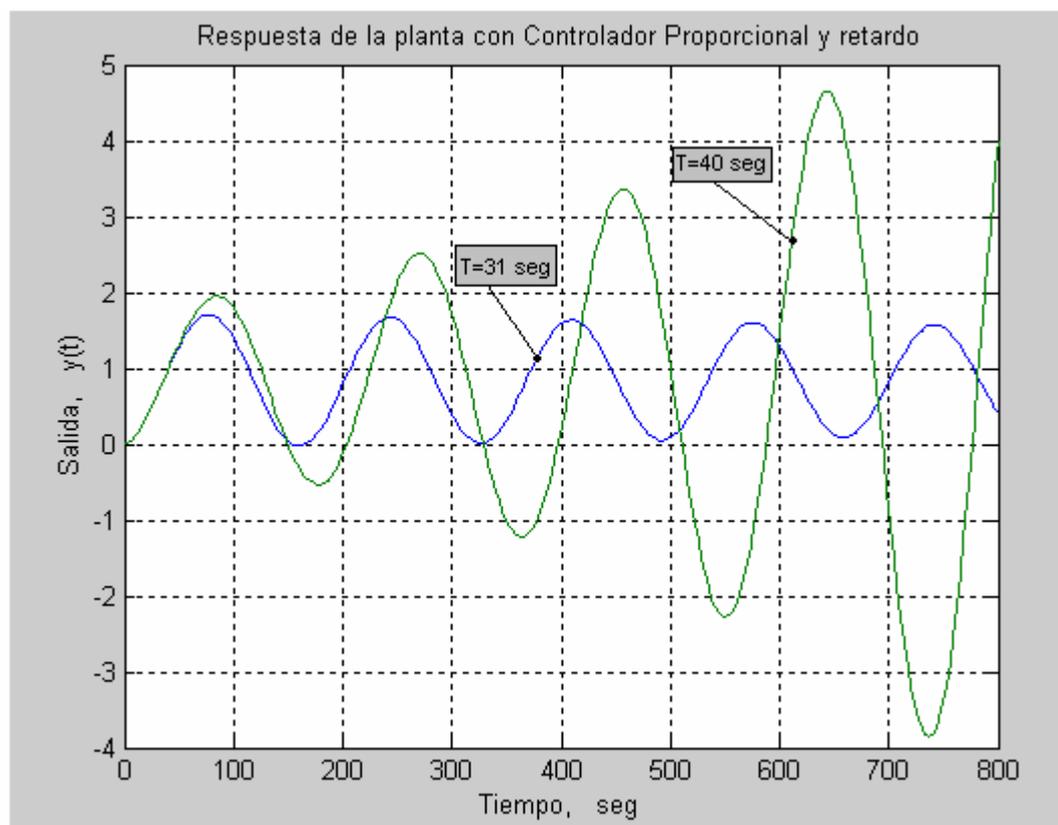


**Fig. 32.** Modelo de Planta Térmica con retardo.

En la figura 33, se muestra la respuesta del sistema a lazo cerrado para cuatro valores del retardo  $T=0, 3.3, 10$  y  $14$  segundos.



**Fig. 33.** Respuesta dinámica de la planta térmica para diferentes retardos.



**Fig.34:** Planta térmica con retardos que la hacen oscilatoria armónica e inestable.

### Conclusión.

La figura 33 muestra claramente que el retardo de transporte o tiempo muerto disminuye la estabilidad relativa de un sistema de control, y esta disminución, es tanto mayor cuanto mayor sea el retardo. Además se puede ver que la ganancia necesaria para lograr un comportamiento satisfactorio, debe disminuirse ante la presencia de retardo, y esta disminución de ganancia será tanto mayor cuanto más grande sea el retardo. Si en la figura 34, se consideran retardos más grandes que los indicados en la figura 33, y el sistema se vuelve oscilatorio armónico o inestable.

**Importante: Cuidado con los retardos de transporte.**

## VII. Aproximación de PADÉ para un retardo de transporte.

El retardo de transporte se puede aproximar por una función transferencia, en la forma de cociente de polinomios. Esto es muy útil cuando se desea obtener diagramas frecuenciales o lugar de raíces para analizar o diseñar sistemas sobre la base de dichos métodos.

Dependiendo del valor del retardo en relación con la constante de tiempo, se pueden obtener diferentes aproximaciones.

### 1) $T \ll$ menor constante de tiempo del sistema

Para este caso se pueden emplear las siguientes aproximaciones al retardo de transporte.

$$\begin{aligned} e^{-Ts} &\cong 1 - Ts \\ e^{-Ts} &\cong \frac{1}{1 + Ts} \\ e^{-Ts} &\cong \frac{2 - Ts}{2 + Ts} \end{aligned} \quad (37)$$

Cualquiera de las relaciones (37), puede ser útil para analizar sistemas con retardo, que cumplan con la premisa indicada precedentemente.

### 2) Aproximación de PADÉ, mediante MATLAB.

Para analizar el tiempo muerto o retardo de transporte, MATLAB utiliza una aproximación de PADÉ, en la forma de cociente de polinomios. Partiendo del conocimiento del tiempo muerto,  $T$ , se utilizan las instrucciones de MATLAB que se indican a continuación.

```
>> [n,d]=pade(T,v);  
>> rintsys(n,d,'s')  
    num/den=
```

 (38)

Donde :

T= Retardo de transporte en seg.

v= Orden de la función transferencia de aproximación.

Ejemplos: Aproximación de PADE, de 1º, 2º y 3º orden utilizando MATLAB.

```
>> [n,d]=pade(10,1);  
>> printsys(n,d,'s')  
  
num/den =  
  
    -1 s + 0.2  
-----  
     s + 0.2  
>> [n,d]=pade(10,2);  
>> printsys(n,d,'s')  
  
num/den =  
  
    s^2 - 0.6 s + 0.12  
-----  
    s^2 + 0.6 s + 0.12  
>> [n,d]=pade(10,3);  
>> printsys(n,d,'s')  
  
num/den =  
  
    -1 s^3 + 1.2 s^2 - 0.6 s + 0.12  
-----  
     s^3 + 1.2 s^2 + 0.6 s + 0.12
```

